



FNA 法基本原理解析

筑信达 吴文博

FNA 法（Fast Nonlinear Analysis Method）也被称为非线性模态时程分析法，是由 Wilson 教授首次提出，并在 CSI 软件中得到深入的应用。此方法极其高效，特别是对于结构系统主要由弹性构件构成，并且仅具有少量非线性连接单元的情况，如图 1 是一些典型的应用场景。但是，由于 FNA 法较少在教科书中出现，而且需要使用荷载相关的 Ritz 向量模态来减少非线性方程的数量并保证足够的精度，这些并不为用户们所熟知。本文将阐释相关的知识，帮助用户较深入地了解 FNA 法，从而正确地使用 FNA 法获得合理的计算结果。

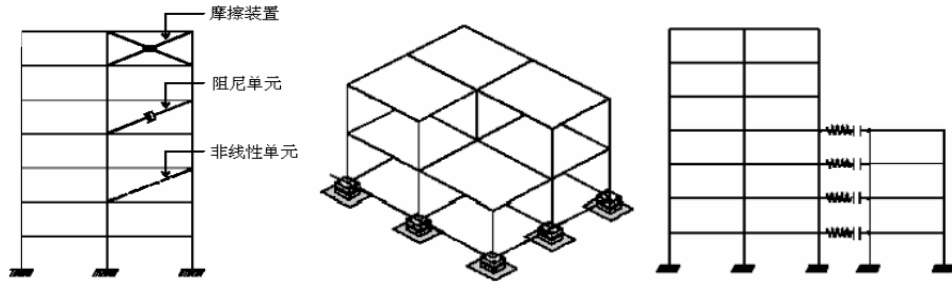


图 1 适用于 FNA 法的典型范例（从左至右：减震装置、基底隔震、相邻框架的间隙单元）

1. FNA 法的表达

具有预定义非线性连接/支座单元的线弹性结构，承受任意荷载的动力平衡方程如下：

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + K_L u(t) + r_N(t) = r(t) \quad (1)$$

其中

K_L ——线弹性结构的刚度矩阵

$r_N(t)$ ——非线性连接单元的恢复力

$r(t)$ ——外荷载

为分析需要，对每一个连接单元非线性自由度，设置一个线性有效刚度(K_e)。仅从分析角度看，有效刚度可以为任意值，可以设置为 0，由于非线性单元恢复力右移，可能造成左侧剩余的模型不稳定，如隔震结构，所以需要有效刚度设置一个合理值。

方程(1)可改写为：

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + (K_L + K_e)u(t) = r(t) - (r_N(t) - K_e u(t)) \quad (2)$$

令：

$$K = K_L + K_e$$

$$\bar{r}_N(t) = r_N(t) - K_e u(t)$$

方程(2)即为：

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = r(t) - \bar{r}_N(t) \quad (3)$$

由于方程(3)左侧均为线性，因此可将方程变换到模态坐标下：

$$u(t) = \Phi Y(t) \quad (4)$$

将式(4)带入式(3)中，有：

$$M\Phi\ddot{Y}(t) + C\Phi\dot{Y}(t) + K\Phi Y(t) = r(t) - \bar{r}_N(t) \quad (5)$$

将方程(5)的左右两边分别乘以 Φ^T 有：

$$\Phi^T M \Phi \ddot{Y}(t) + \Phi^T C \Phi \dot{Y}(t) + \Phi^T K \Phi Y(t) = \Phi^T r(t) - \Phi^T \bar{r}_N(t) \quad (6)$$



对于 SPA2000 和 ETABS 软件，模态向量会进行质量归一化，因此：

$$\Phi^T M \Phi = I$$

$$\Omega^2 = \Phi^T K \Phi = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega_n^2 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \Phi^T C \Phi = \begin{pmatrix} 2\xi_1\omega_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2\xi_n\omega_n \end{pmatrix}$$

其中 I 为单位矩阵。

令：

$$F(t) = \Phi^T r(t) - \Phi^T \bar{r}_N(t) \quad (7)$$

方程 6 即可简化为：

$$\ddot{Y}(t) + \Lambda \dot{Y}(t) + \Omega^2 Y(t) = F(t) \quad (8)$$

将方程(8)展开后，一个典型的模态方程为：

$$\ddot{y}(t)_n + 2\xi_n\omega_n\dot{y}(t)_n + \omega_n^2 y(t)_n = f(t)_n \quad (9)$$

式中 $f(t)$ 是模态荷载，并且对于非线性单元而言，它是在同一时间点上的所有其它模态反应的函数，需迭代后方可确定。

由方程(9)可以看出，非线性方程的数量与模态的数量相关，那么使用尽量少的模态数量，得到足够精度的分析结果，将成为 FNA 法的关键。

这里需要注意的是，如果分析中包含了所有的模态，式(7)也将是精确的，如果分析中仅包含了部分模态的话，式(7)将不一定能代表真实非线性力。

现以一个五层剪切框架说明此问题（此例与相关结果引自参考文献[1]），此框架与框架模态形状如图 2 所示，图中 $m=45000\text{kg}$ ， $k=5482\text{kN/m}$ 。

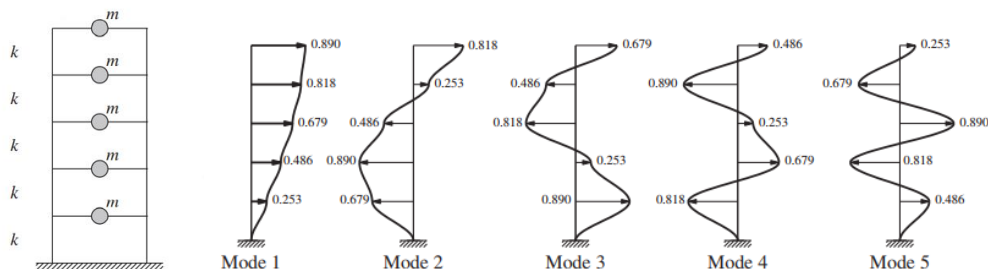


图 2 五层剪切框架与其模态形状

观察式(7)，如果外荷载 $r(t)$ 为地震作用，地震力的分布与质量分布相同，其模态展开（展开方法可参考文献 1 第 13 章内容）如图 3 所示。由图 3 可以看出，低阶模态的贡献最大，随着模态阶数的增高，模态的贡献逐渐减小。我们通过查看每个模态展开下的基底剪力与总剪力的比值（模态质量参与系数），即可判断分析中是否包含了足够多的模态。一般情况下，分析中需要满足质量参与系数达到 90% 以上的要求，本例中只需要 2~3 个模态就可以获得很好的分析精度。

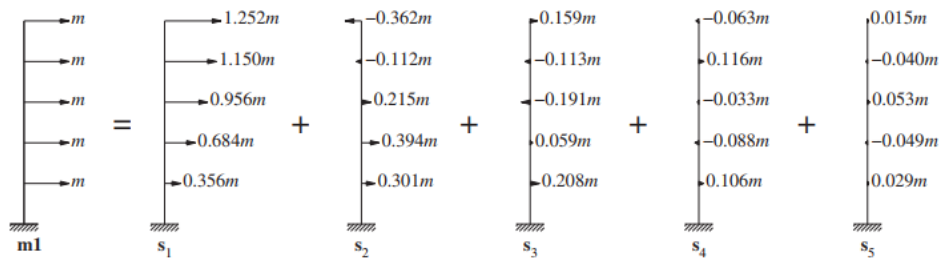


图 3 地震作用的模态展开



但是对于非线性连接单元力 $\bar{r}_N(t)$ ，并不是这样的，非线性连接单元力 $\bar{r}_N(t)$ 是一对等的反向内力，如图 4 所示。

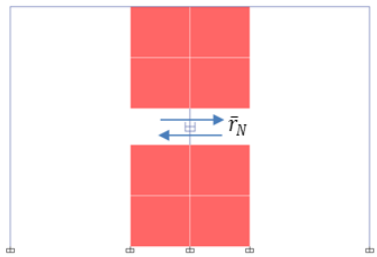


图 4 非线性连接单元内力

如果在顶层处设置有图 4 所示的阻尼器，且仅考虑水平力引起的动力效应，那么非线性力的模态展开如图 5 所示：

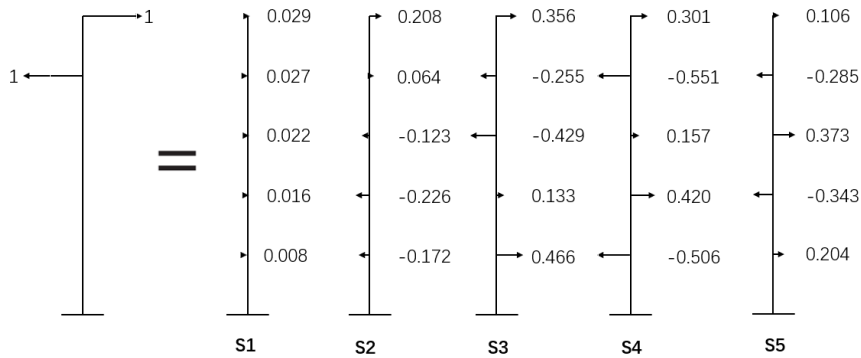


图 5 非线性力的模态展开

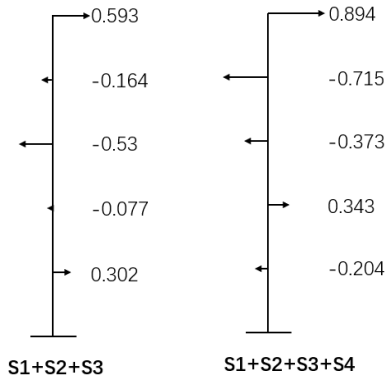


图 6 不同模态阶数下的模态力

从图 5 中可以看出，低阶模态对非线性力的贡献非常小，反而高阶模态贡献非常大。就本例而言，如图 6 所示，即便使用前 4 阶模态，仍然不能得到满意的结果，需要取全部 5 个模态才能有足够的精度。由上可以看出，进行 FNA 分析时，为了准确地描述非线性力，需要较多高阶模态，如果采用特征值模态需要超高的模态数量，甚至需要全部模态，这将导致分析速度缓慢。那么 FNA 法的使用将面临两个问题：第一，是否有更好的办法可以减少模态数量且获得足够的精度？第二，如何判断模态数量是否足够？

针对第一个问题，RITZ 向量模态将是一个更佳的选择。由于特征值向量模态与荷载完全无关，只与质量和刚度有关，因此会求解出大量与荷载无关的模态，这些模态对分析结果没有任何帮助，却增加了方程数量，降低了分析速度。例如，计算水平地震作用时，竖向模态对外荷载的贡献就可能为 0。此外，特征值分析中还可能大量无法被荷载激发的局部振型，如图 7 所示，该模型需要计算 150 个特征值模态才可以达到质量参与系数 90%，我们检查时发现，模型中存在大量的局部振型，这些局部振型质量参与系数非常小，对分析贡献几乎为 0。

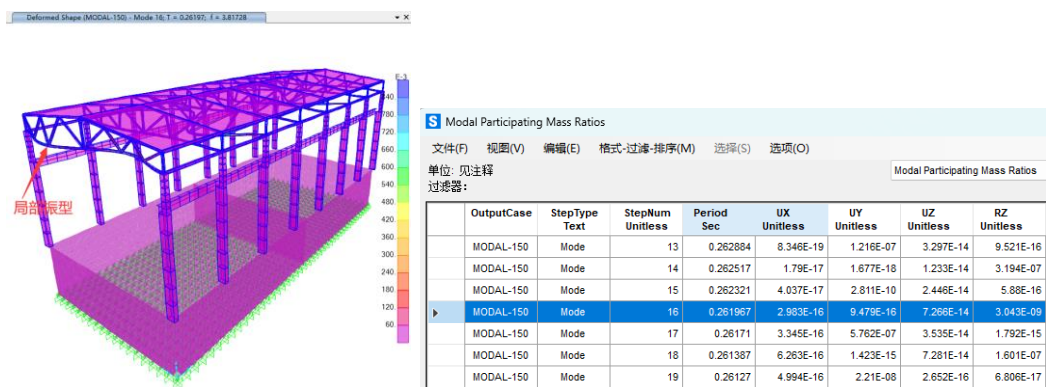


图 7 基于特征值向量法的结构局部振型与质量参与系数

相比于特征值向量法，基于力的 RITZ 向量模态则可以考虑动力荷载的空间分布，与荷载无关的模式将不会被激发出来。如图 7 所示的结构，当采用 RITZ 向量法计算时，采用 30 个模态即可得到足够的质量参与系数，并且会过滤掉很多局部振型，各振型的质量参与系数会更高，如图 8 所示。

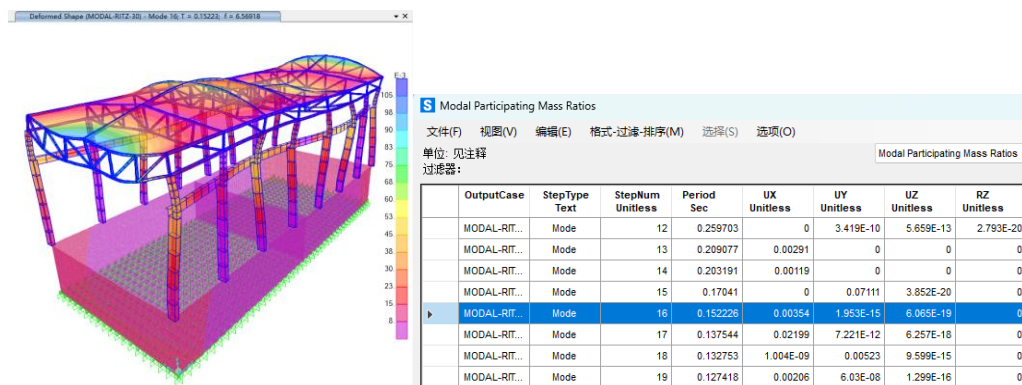


图 8 基于 RITZ 向量法的结构振型与质量参与系数

为能够更好的描述非线性力，需要特别考虑荷载模式“LINK”，如图 9 所示，这是至关重要的。“LINK”荷载模式会以图 4 的模式施加于结构中，并且每一个非线性连接单元自由度均会产生一对等大反向的力，这些力形成的 RITZ 向量会生成与非线性力相关的模态，如图 10 所示，这些模态常常是与连接单元相关的局部振型。这些振型用于表达非线性力是非常有效的，但是如果使用特征值向量描述非线性力则需要非常多的模态数量。同时我们还需要注意的是，这些“LINK”荷载产生的向量通常频率较高，由于 RITZ 向量具备高模态截断时的静力修正，所以使用 1~2 代 RITZ 向量即可得到非常精确的结果。关于静力修正以及循环代数的内容，可参考技术通讯文章《[模态分析的实现与常见问题](#)》1.1 节的内容。



图 9 典型的 RITZ 向量定义

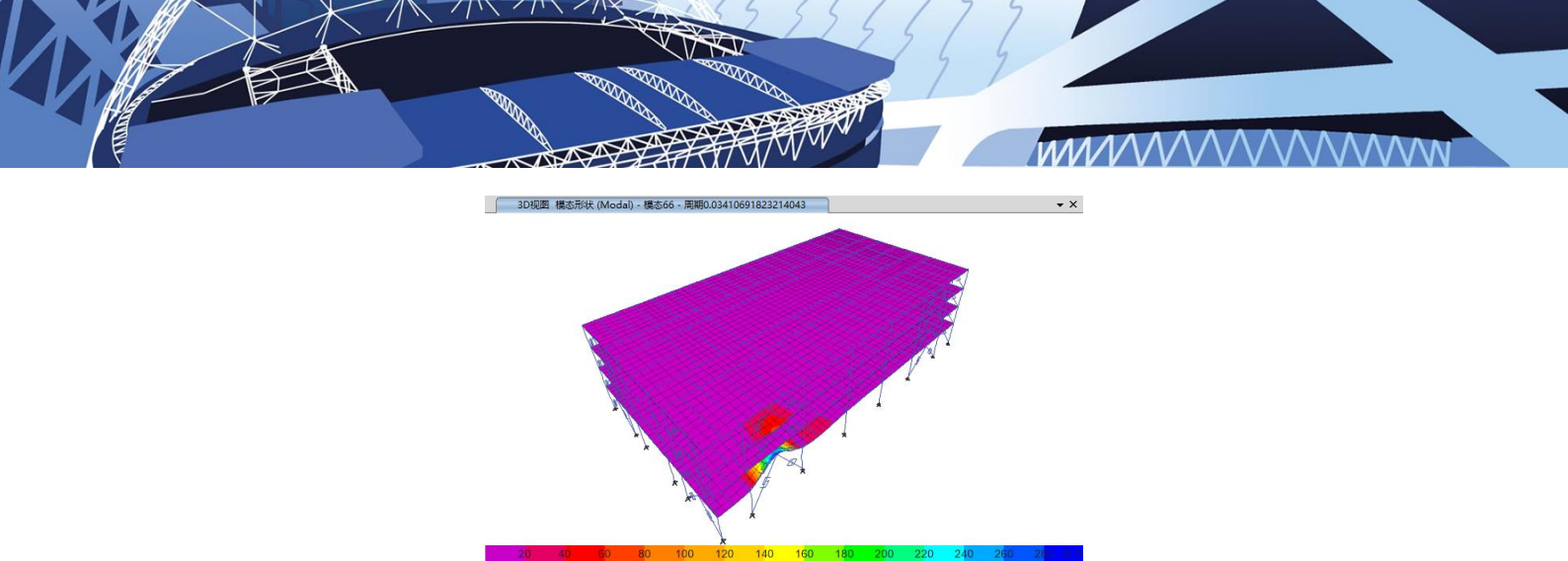


图 10 基于“LINK”荷载的相关模态

由上可知，当使用 FNA 法进行分析时，应采用 RITZ 向量模态法，RITZ 向量模态的具体设置如图 9 所示，其中，荷载模式“加速度”用于描述地震作用，如果仅考虑单向或双向地震时，只需添加 UX 和 UY 两个方向，如果需要考虑三向地震作用，则需要添加 UX、UY 和 UZ 三个方向，最大循环数可按默认取为 0；荷载模式“Link”用于描述非线性力，对于 FNA 法，此项是必填项，这可以用少量的模态很好的模拟非线性力，程序只考虑连接单元非线性自由度的非线性力，此选项不会作用于线性连接单元；荷载模式“DEAD”和“LIVE”用于描述初始重力工况，由于初始重力工况没有动力效应，最大循环数取为 1 即可，如果分析中不考虑初始重力工况，可不添加这两个荷载模式。

针对第二个问题，威尔逊教授提出使用荷载参与系数来评估是否有足够的模态数量来近似描述任意荷载。关于荷载参与系数的具体定义可参考文献[2]，本文在此不做赘述。荷载参与系数分为静力荷载参与系数与动力荷载参与系数，一般要求静力荷载参与系数达到 100%，动力荷载参与系数尽可能高，程序可输出荷载参与系数。RITZ 向量模态在满足模态数量大于荷载向量数的情况下，是自动满足静力荷载参与系数达到 100%，同时，RITZ 向量模态有静力修正的效果，而且 Link 激发的模态通常为局部模态且为高阶模态，所以一般只使用一个 RITZ 向量模拟就有足够精度，所以对于 LINK 的动力荷载参与系数可不作要求，但不可为 0，对加速度荷载的动力荷载参与系数建议达到 90%，威尔逊教授推荐达到 95%以上。按以上原则，对于一个以“层”为主的建筑结构，推荐的模态数量估算值为：

$$N \geq 3 \cdot N_s + N_{Link-NL} + N_{Load}$$

其中， N_s ——结构的楼层数； $3 \cdot N_s$ 用于计算地震作用相关模态，此值可适当调整。

$N_{link-NL}$ ——连接单元的非线性自由度数，用于计算非线性力相关模态，仅考虑每个非线性连接单元为一个 RITZ 向量。

N_{load} ——荷载数，通常指荷载模式 DEAD 和 LIVE，所以一般取为 2。

应该注意的是，《CSI 分析参考手册》中专门提到，RITZ 向量模态的数量没有一个可以应用于所有情况的简单准则，用户应依据自己的工程判断确定所需的模态数量。一个实用的做法是增加模态数量，并观察结构响应是否有明显的变化，如果变化明显，则继续增加模态数量，直至结构响应不再随模态数量变化而显著变化。在减隔震分析中，上面的推荐公式在大部分情况是适用的。

2. 算例

现通过一个减震结构算例，对比一下模态求解方法（特征值向量与 RITZ 向量）和模态设置对分析结果的影响。模型如图 11 所示，结构为框剪结构，共 5 层，每层 X 和 Y 方向各布置 2 套黏滞阻尼器。地震波采用的是人工波，如图 12 所示。现采用 FNA 法对模型进行分析，分析中采用三种方法：

方法一：使用特征值向量法，模态数量为 80 个，

方法二：使用 RITZ 向量法，模态定义如图 11 所示，模态数量为 80 个，

方法三，使用 RITZ 向量法，模态定义同模型二，但 RITZ 向量荷载模式中不包含 LINK，模态数量为 80 个。

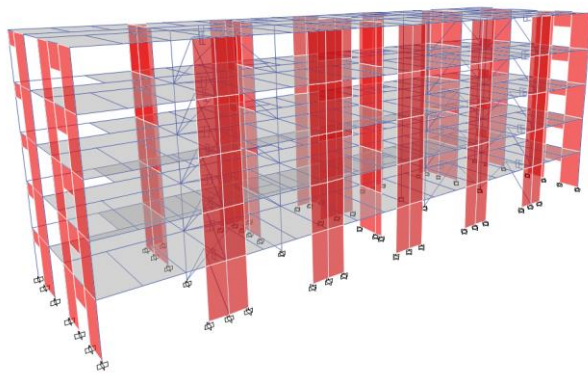


图 11 结构模型 3D 视图



图 12 输入地震动

计算结果如下图所示：

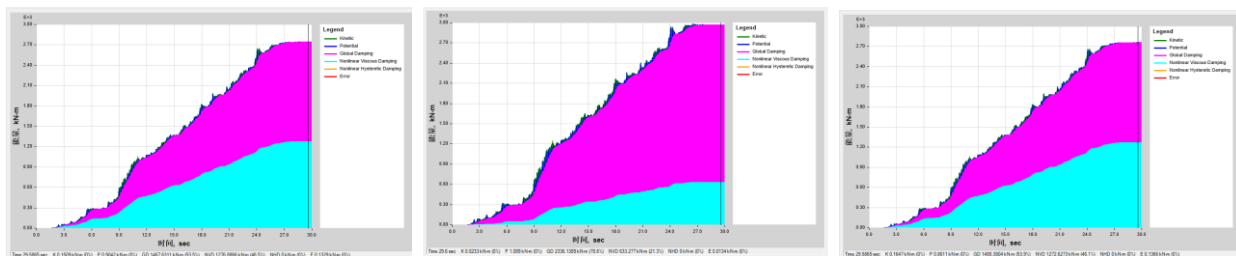


图 13 结构累计能量图（左图为方法一，中图为方法二，右图为方法三）

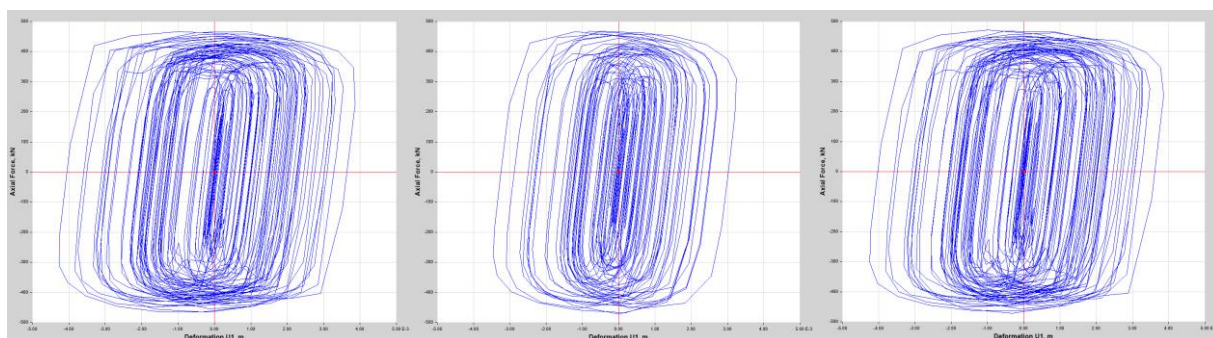


图 14 典型连接单元滞回曲线（左图为方法一，中图为方法二，右图为方法三）

从图中可以看出，方法一与方法三的阻尼器耗能情况是基本相当的，如果 RITZ 向量中不包含荷载模式“LINK”，那么 RITZ 向量法的结果并不会明显优于特征值向量法。方法二的阻尼器耗能明显小于其他两种方法，阻尼器出力相差不多，但是**阻尼器变形减少了很多**。这与很多用户的经验是相符的，即：当结构中存在黏滞阻尼器时，FNA 法如果使用特征值向量模态时，计算附加阻尼比会严重偏高。而造成三种方法之间差异的原因，仍然是阻尼器的非线性力是否得到了准确描述，显然方法一和方法三未能准确描述，而方法二则可以。

那么为何方法一和方法三未能准确描述非线性力呢？其中一个重要的原因是粘滞阻尼器为速度型阻尼器，有效刚度一般取为 0，这会造成**当特征值模态数量较少时**，模态形状不能体现与阻尼器相连的支撑的变形，进而导致阻尼器对周边构件的影响可能会被忽略，而在 RITZ 模态中则可以体现出受阻尼器影响导致支撑构件的变形，如图 15 所示。

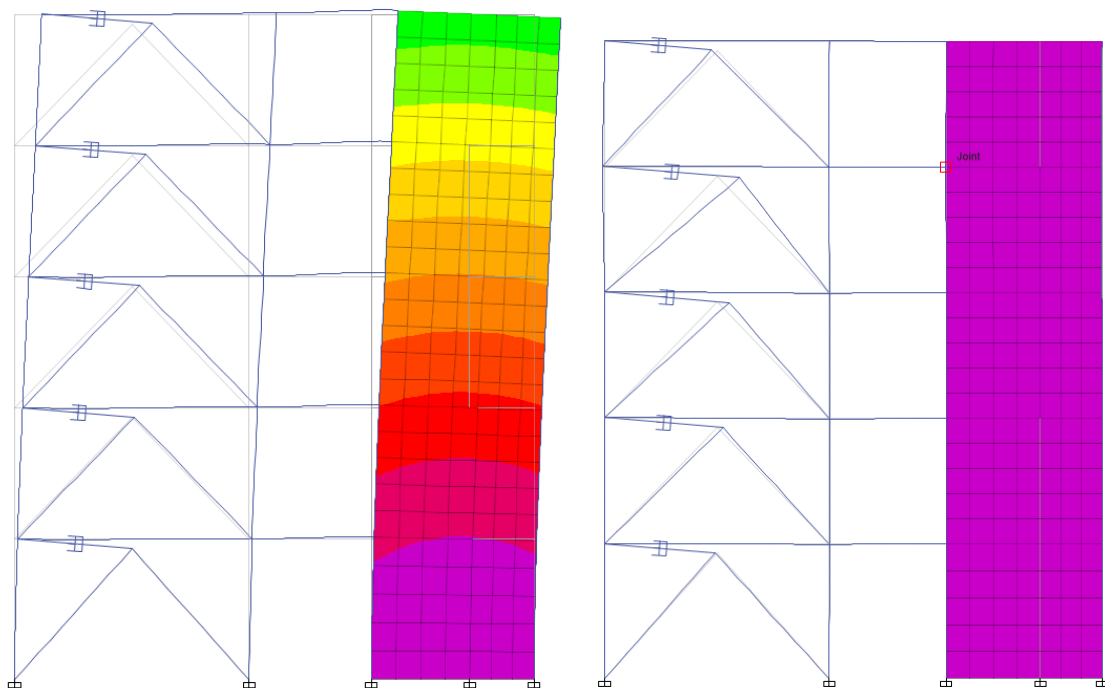


图 15 典型模态变形图（左图为特征值模态，右图为 RITZ 向量模态）

为证明上述观点，我们观察了方法一与方法二中，支撑两端端点的水平变形，以及支撑的轴向力，如图 16 和图 17 所示。可以发现对于方法一，支撑两端的端点变形基本相同，轴力也几乎为 0，而方法二支撑两端的端点变形差异很大，轴力也比较正常。这说明方法一没能正确的考虑阻尼器对周边构件的影响，致使支撑构件无变形，进而高估阻尼器的变形。

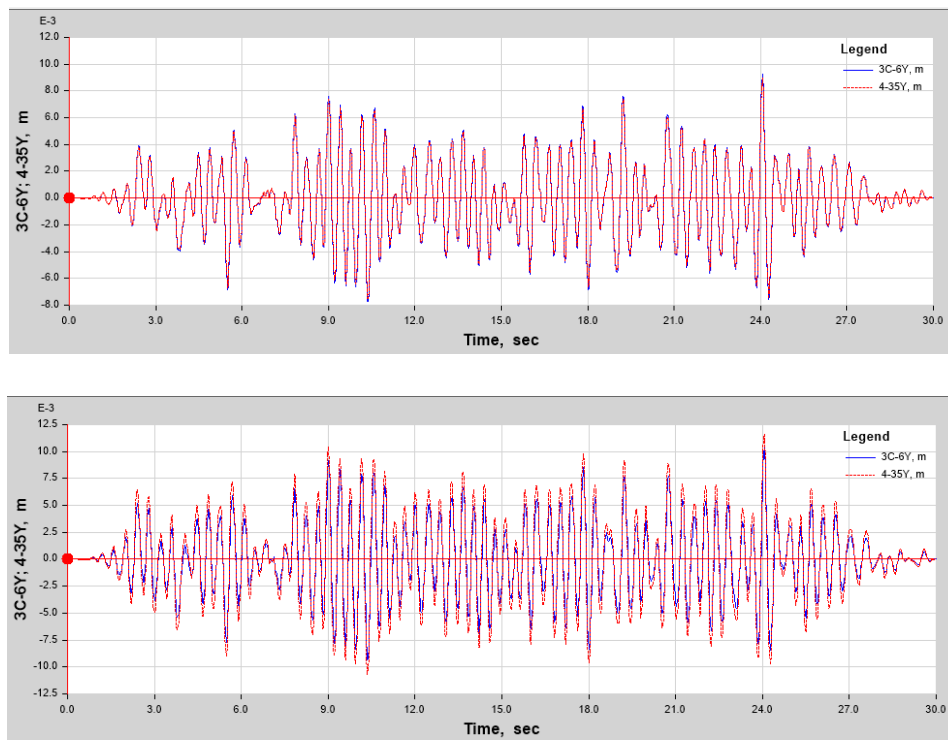


图 16 支撑端点的水平变形（上图为方法一，下图为方法二）

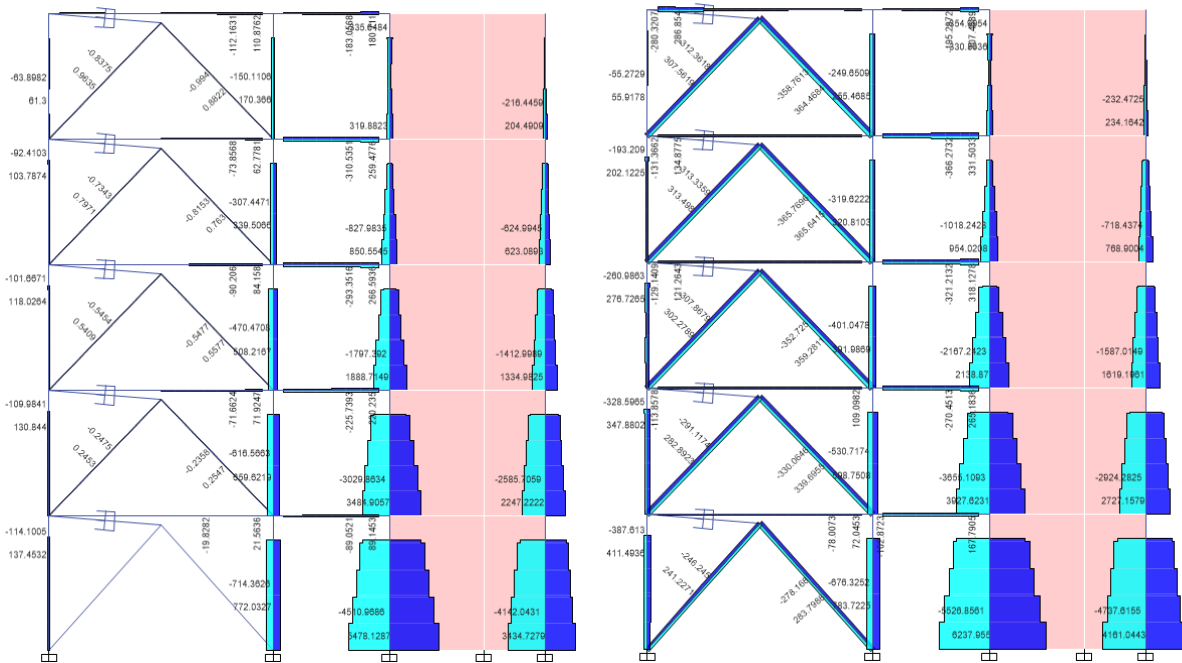


图 17 支撑构件轴力图（左图为方法一，右图为方法二）

由上可知，进行 FNA 法分析时，应采用考虑“LINK”荷载模式的 RITZ 向量，这种方法可以使用少量的模式数得到足够精确的结果，而使用特征值向量法或不考虑“LINK”荷载模式的 RITZ 向量则无法准确的模拟连接单元的非线性力，致使分析结果不准确。

5. 小结

本文介绍 FNA 法的基本原理，并详述了准确表达非线性力的必要性。SAP2000 和 ETABS 可以通过考虑连接单元非线性力的 RITZ 向量模态和足够数量的模态数量，保证分析具有足够的计算精度，同时又有非常快的计算速度。

参考资料

- [1] Anil K.Chopra 结构动力学 (理论及其在地震工程中的应用第 5 版) [M].2020
- [2] Wilson E L. Static and Dynamic Analysis of Structures [M], Fourth Edition (Revised June 2010). Computers and Structures Inc., Berkeley USA, 2010.
- [3] Computers & Structures Inc., 北京筑信达工程咨询有限公司. CSI 分析参考手册. 2019