

# SAP2000 稳态动力学分析要点解析

筑信达 张志国

稳态动力学分析 (Steady State Analysis) 特指结构或构件在周期性简谐荷载作用下的强迫振动分析, 也称谐响应分析 (Harmonic Response Analysis)。SAP2000 稳态动力学分析通常用于计算旋转式动力机器 (汽轮机、发电机或压缩机等) 产生的转子离心力 (也称扰力) 对上部结构或基础产生的持续稳定的动力响应, 从而克服共振、疲劳及其他强迫振动引起的不良影响。

针对 SAP2000 稳态动力学分析, 用户需要掌握的技术要点包括稳态函数、扫频范围、相位角、滞回阻尼以及多扰力共同作用等。本文拟从工程应用的角度介绍上述技术要点以及部分结构动力学中的基本概念, 希望对从事动力机器基础设计的结构工程师有所帮助。

## 1. 动力荷载

静力荷载指大小、方向和作用点不随时间变化或随时间变化非常缓慢的荷载, 如结构的自重、静水压力或雪荷载等。动力荷载指大小、方向和作用点随时间快速变化或短时间内突然作用或消失的荷载, 如风荷载、冲击荷载或汽车荷载等。在实际工程中, 动力荷载作用下的结构响应并非必须要借助于动力时程分析, 实际工程中存在很多简化或近似的静力分析方法。例如:

- 风荷载采用平均风压加脉动风压的等效风压;
- 汽车荷载忽略惯性力后引入作用点相关的影响线或影响面;
- 抗震计算中采用的底部剪力法或振型分解反应谱法也属于静力分析的范畴。

同理, 简谐荷载作用下的稳态动力学分析也不是动力时程分析, 而是采用高效便捷的“静力分析+动力放大系数”的准动力计算方法。

## 2. 简谐荷载

根据荷载随时间的变化规律, 动力荷载可分为周期荷载和非周期荷载, 简谐荷载指随时间按正弦或余弦规律变化的周期荷载。如图 1 所示, 简谐荷载的组成三要素包括: 幅值  $F_0$ 、相位角  $\phi$  和圆频率  $\omega$ 。

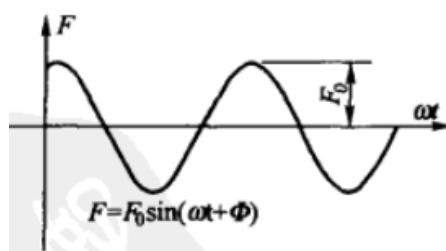


图 1 简谐荷载的组成三要素

### 2.1 稳态函数

如下所示, 根据理论力学中的离心力公式可知, 在质量  $m$  和偏心距  $e$  保持不变的前提下, 转子离心力的大小 (即简谐荷载的幅值  $F_0$ ) 与角速度 (即圆频率  $\omega$ ) 或转速的平方成正比。

$$F_0 = m\omega^2 e = m\left(\frac{2\pi n}{60}\right)^2 e$$

为了在 SAP2000 中定义简谐荷载的幅值与圆频率之间的上述数学关系, 用户应点击【定义>函数>稳态函数】命令。如图 2 (左) 所示, 用户可直接输入工程频率 (Hz) 或转速 (RPM) 与数值组成的多个数据对, SAP2000 自动在各个数据点之间以线性插值的方式拟合二次曲线。但是, 这种直接输入数据的方法较为繁琐, 建议先在 Excel 中利用数学函数批量化生成大量数据, 然后以 txt 文件的方式导入 SAP2000。

注意, 机器设备厂家或行业设计规范通常并不会提供转子的质量和偏心距, 而是直接给出工作转速下的扰力 (即上述转子离心力)。因此, 用户应在 SAP2000 中以荷载模式的方式施加工作转速下的扰力, 然后利用稳态函数定义非工作转速下的扰力与工作转速下的扰力的比值, 该比值等于非工作转速与工作转速的比值的平方。如图 2 (右) 所示, 工作转速 3000RMP 对应的稳态函数值为 1.0, 非工作转速 1500RMP 对应的稳态函数为 0.25。

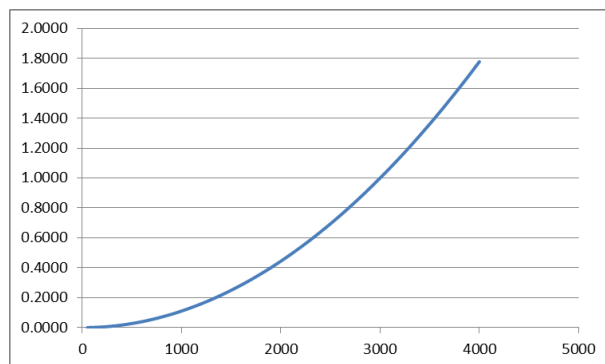
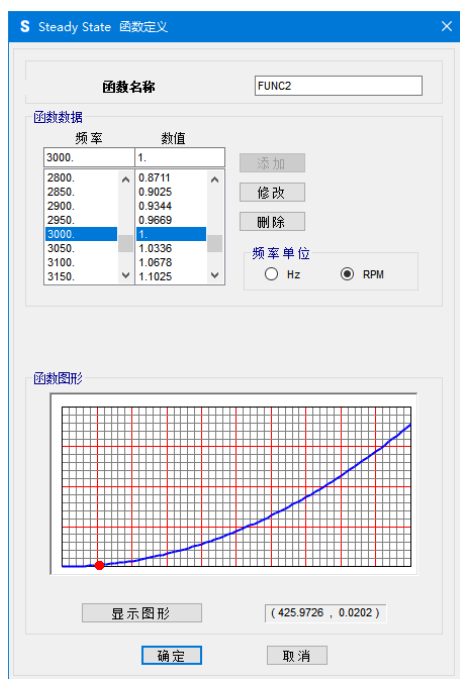
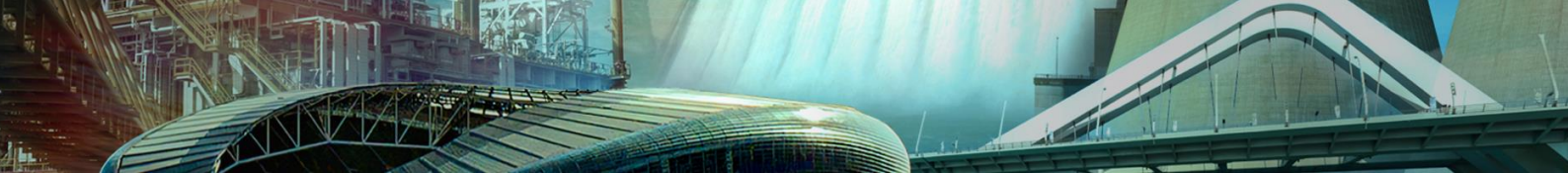


图 2 稳态函数的定义和 Excel 拟合曲线

## 2.2 相位角

当多个简谐荷载同时作用于结构时，相位角可用于定义各个简谐荷载领先或滞后于基准时刻的时间差。其中，正的相位角代表领先于基准时刻，负的相位角代表滞后于基准时刻，领先或滞后的时间差等于相位角与圆频率  $\omega$  的比值。

以图 3 所示的工作台为例，电机绕 Y 轴负方向转动（按右手螺旋法则确定），转子偏心质量的起始位置为 X 轴正方向，转子离心力  $F_0$  在 X 轴和 Z 轴上的两个分量分别为  $F_x$  和  $F_z$ 。由于  $F_z$  滞后于  $F_x$  的相位差为  $\pi/2=90^\circ$ ， $F_z$  达到峰值落后于  $F_x$  达到峰值的时间差为  $(\pi/2/\omega)$  秒。

如果用户在稳态动力学分析中同时施加 X 和 Z 方向的扰力分量，应分别指定二者的相位角。如果以  $F_x$  为基准时刻（即相位角为  $0^\circ$ ）， $F_z$  的相位角应为  $-90^\circ$ 。同理，如果以  $F_z$  为基准时刻（相位角为  $0^\circ$ ）， $F_x$  的相位角为  $90^\circ$ 。

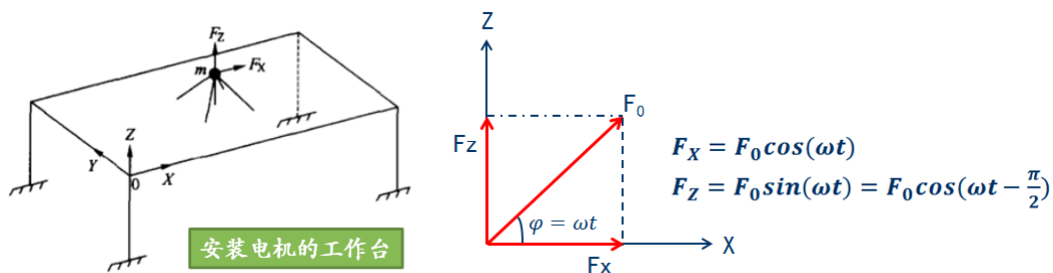


图 3 转子离心力的水平和竖向分量

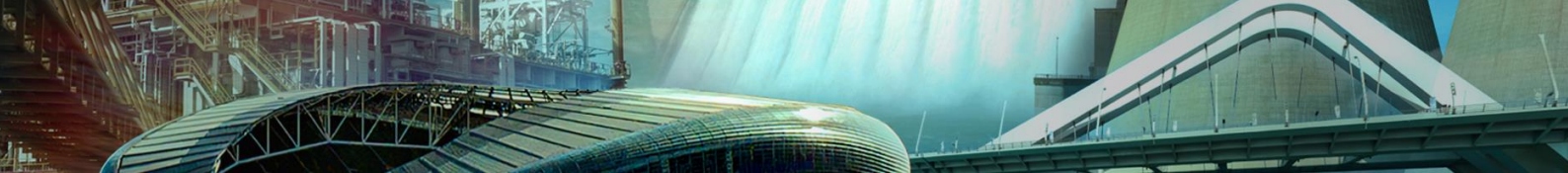
一般情况下，根据实际的结构体系或计算要求，用户只需计算扰力作用点的竖向振动线位移。此时，用户可忽略 X 方向的扰力分量及其相位角。除上述荷载分量之间的相位差外，简谐荷载和结构的稳态响应之间也会存在相位差，详见后文。

## 2.3 扫频范围

简谐荷载的圆频率多用于理论分析，实际工程中多采用转速、周期以及工程频率。以上四个物理量采用的单位依次为频率  $\omega$  (rad/s)，转速  $n$  (转/分，即 RMP)，周期  $T$  (s)，工程频率  $f$  (Hz)。四者之间的转换关系为：

$$f = \omega / 2\pi = n / 60 = 1 / T$$

稳态函数用于定义简谐荷载的幅值与转速之间的数学关系，实际参与动力计算的转速称为扫频范围。扫频范围即动力机器的转速范围，根据《动力机器基础设计规范 GB 50040-96》第 5.2.3 条规定：“计算振动线位移时，宜取在工作转速  $\pm 25\%$  范围内的最大振动线位移作为工作转速时的计算振动线位移”。在实际的工程应用中，用户通常从零转速开始计算，直到  $125\%$



的工作转速。

动力机器的转速不同，结构的动力响应也随之变化，尤其在转速接近结构的自振频率时会引起最不利的“共振”响应。因此，为了捕捉到结构的最不利响应，扫频范围不仅包括以频率步定义的等间隔分布的频率点，还应考虑模态频率（即自振频率）及其临界值，如图 4 所示。注意，频率步中的数值单位为 Hz，而非 RMP 或 rad/s。模态频率的相对偏差值为百分比，如±0.01 代表 101%和 99%的模态频率。

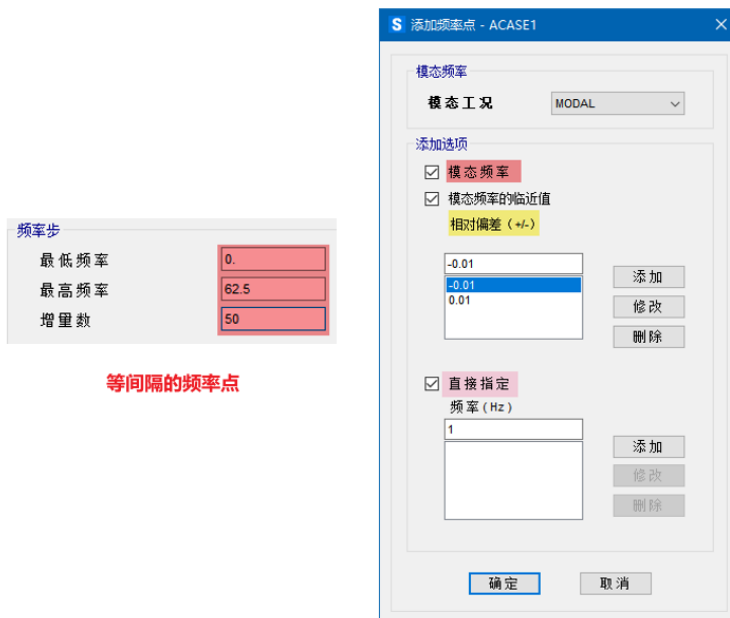


图 4 稳态动力学分析的扫频范围

### 3. 稳态响应与瞬态响应

本节以图 5 所示的单自由度体系为例，介绍稳态响应和瞬态响应的区别以及阻尼与相位差之间的联系。该体系中的弹簧刚度为  $k$ ，阻尼系数为  $c$ ，质量为  $m$ ，简谐荷载  $p(t)=\sin(\omega t)$ 。

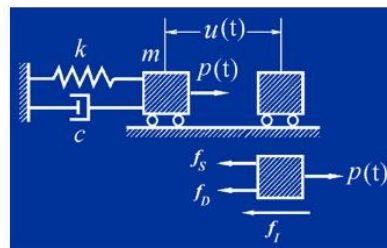


图 5 单自由度体系示意图

如图 6（左）所示，简谐荷载作用下的无阻尼单自由度体系的动力响应由两部分组成，瞬态响应的振动频率等于体系的自振频率  $\omega_n$ ，稳态响应的的振动频率等于简谐荷载的频率  $\omega$ 。在无阻尼体系中，瞬态响应不会衰减或消失，稳态响应与简谐荷载之间保持同步（相位差为零）。

如图 6（右）所示，简谐荷载作用下的有阻尼单自由度体系的动力响应也由两部分组成，瞬态响应的振动频率等于体系的自振频率  $\omega_D$ ，稳态响应的的振动频率等于简谐荷载的频率  $\omega$ 。除此之外，有阻尼体系的动力响应存在以下两个显著特点：

1. 瞬态响应快速衰减直至消失（指数函数中的阻尼比  $\zeta$ ），最终只有与简谐荷载同频率的稳态响应。
2. 稳态响应和简谐荷载之间存在相位差  $\phi$ ，即二者保持同频异步。

$$u(t) = u(0) \cos \omega_n t + \left[ \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} - \frac{p_0}{k} \frac{\omega / \omega_n}{1 - (\omega / \omega_n)^2} \right] \sin \omega_n t + \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - (\omega / \omega_n)^2} \sin \omega t$$

瞬态响应 (top part)  
稳态响应 (bottom part)

$$u(t) = e^{-\zeta \omega_n t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) + \sqrt{C^2 + D^2} \sin(\omega t + \phi)$$

瞬态响应 (left part)  
稳态响应 (right part)



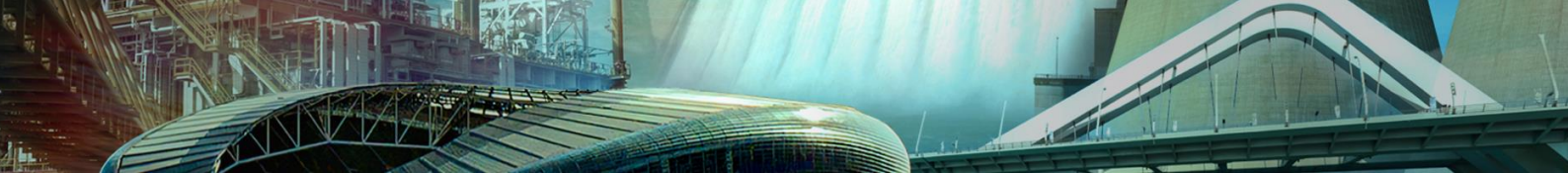


图 6 简谐荷载作用下单自由度体系的动力响应（左：无阻尼；右：有阻尼）

在 SAP2000 中采用动力时程分析计算上述单自由度体系的位移时程曲线。如图 7（左）所示，无阻尼体系的位移时程曲线虽然整体表现为随时间按正弦或余弦规律变化，但由于瞬态响应不会衰减或消失而存在局部叠加的锯齿形波动。如图 7（右）所示，有阻尼体系的位移时程曲线在初始阶段存在瞬态响应的叠加，但在若干个周期内快速衰减直至消失，后续稳态响应表现为理想的光滑的正弦或余弦曲线。

由于实际结构中的阻尼不可能为零，故稳态响应才是结构工程师最关注的动力响应，这也是稳态动力学分析“只计算稳态响应，忽略瞬态响应”的理论依据。在特殊情况下，简谐荷载在初始阶段的瞬态响应可能会远远大于稳态响应，从而成为结构最大动力响应的控制量，此时应改用动力时程分析。

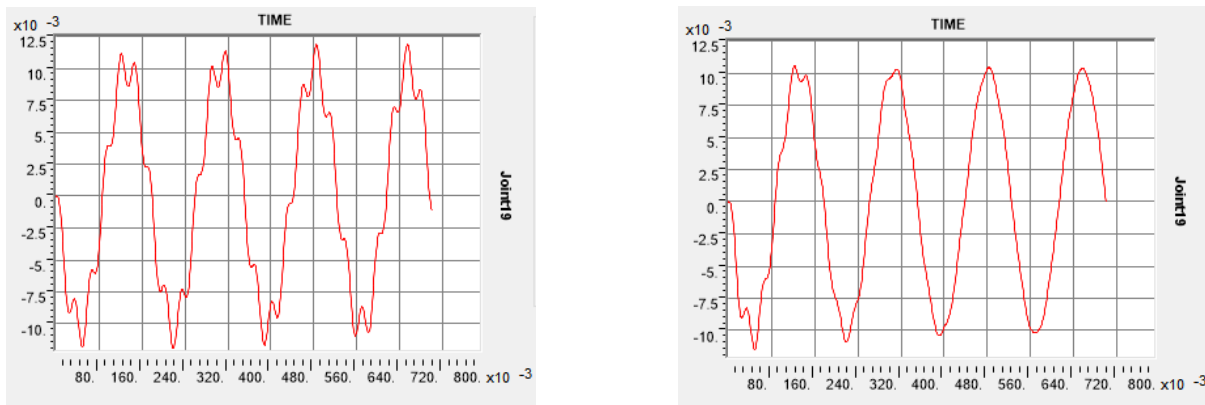


图 7 简谐荷载作用下单自由度体系的位移时程曲线（左：无阻尼；右：有阻尼）

#### 4. 多扰力共同作用

如前文第 2.2 小节所述，同一个扰力的水平和竖向分量之间存在相位差，用户可在稳态工况中定义相位角。如前文第 3 节所述，结构阻尼会在简谐荷载和结构响应之间产生相位差，SAP2000 可以计算并输出各个响应量的相位角。

除此之外，动力机器一般有多组不同频率的扰力同时作用在结构或基础上，但这些不同频率的扰力和相位角都是随机变量，既无法输入也无法计算。从概率统计的角度讲，各个扰力同时达到最大值以及各个扰力的方向完全相同的概率极低，比较可能出现的最大振动位移等于各个扰力产生的最大振动位移的 SRSS（平方和的平方根）组合，如下所示。

**4.1.8** 当有多个扰力作用时，质点的振动位移可按下式计算：

$$u_i = \sqrt{\sum_{k=1}^m u_{ik}^2} \quad (4.1.8)$$

式中： $u_i$ ——质点  $i$  的振动位移(m)；

$u_{ik}$ ——第  $k$  个扰力对质点  $i$  产生的振动位移(m)。

如图 8 所示，SAP2000 提供 SRSS 类型的荷载组合可以满足上述要求，荷载组合的最大值即各个工况的最大绝对值的平方和的开方根，最小值为最大值的相反数（异号）。

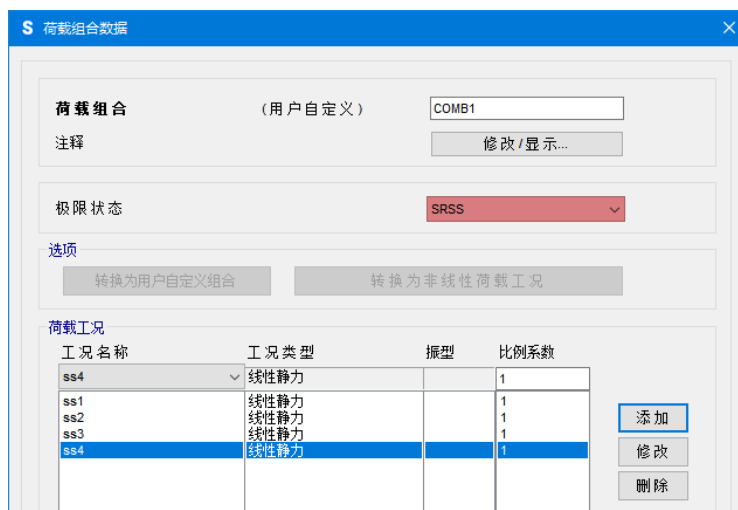
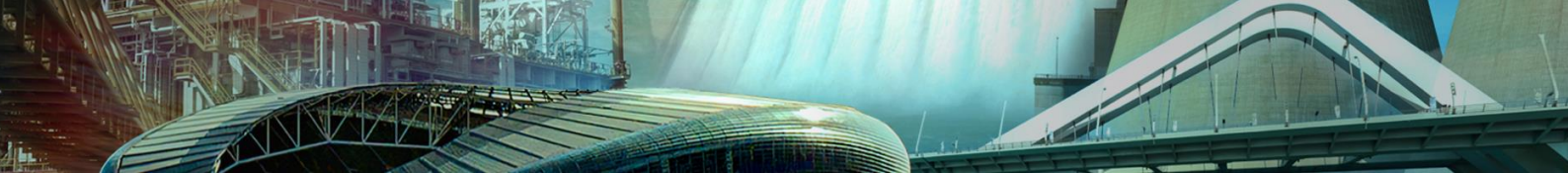


图 8 多扰力共同作用的 SRSS 荷载组合

## 5. 滞回阻尼

稳态动力学分析采用基于位移的频率相关的滞回阻尼矩阵  $D(\omega)$ ，即：阻尼力与位移成正比且反向。如下所示，滞回阻尼矩阵为质量矩阵与刚度矩阵的线性组合， $d_K$ 为刚度比例系数， $d_M$ 为质量比例系数。当  $d_M=0$  且  $d_K(\omega)=2d(\omega)$ 时，滞回阻尼可近似匹配结构的粘滞阻尼比  $d(\omega)$ 。

$$D(\omega) = d_K(\omega)K + d_M(\omega)M$$

根据《动力机器基础设计规范 GB 50040-96》附录 C.1.3 规定：对于框架式基础的强迫振动计算，结构阻尼比可采用 0.0625。如果各个振型的阻尼比均为 0.0625，等效的滞回阻尼比例系数（ $d_M=0$ ； $d_K=0.125$ ）可在结构的自振频率处得到与粘滞阻尼同等水平的共振响应。因此，在实际的工程应用中，如果用户缺少频率相关的阻尼数据，可取质量比例系数为零，刚度比例系数为两倍的结构阻尼比，如图 9 所示。

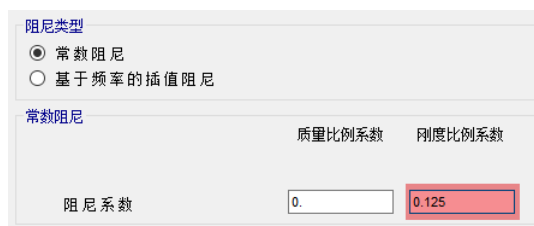


图 9 稳态工况的滞回阻尼

## 参考资料

- [1] 动力机器基础设计规范 GB 50040-96 [S]. 北京：中国计划出版社, 1996
- [2] 动力机器基础设计规范 GB 50040-2020 [S]. 北京：中国计划出版社, 2020
- [3] CSI Analysis Reference Manual[M]. 2017
- [4] Edward L. Wilson. Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures[M]. 2002
- [5] 刘晶波，杜修力. 结构动力学[M]. 北京：机械工业出版社, 2005