

预应力分析

1 模型信息

如图 1 所示，本例分别采用 SAP2000 框架单元、壳单元和实体单元，计算抛物线形预应力钢筋在混凝土简支梁的跨中截面处产生的弯矩、挠度以及顶部和底部的正应力。

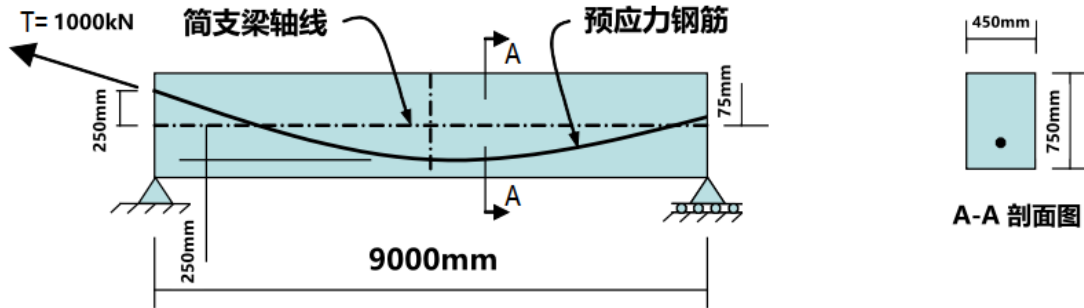


图 1 混凝土简支梁及预应力钢筋示意图

1.1 几何尺寸

- 跨度：L=9000m
- 截面高度：H=750mm
- 截面宽度：B=450mm
- 预应力钢筋的偏心距：左端+250mm，跨中-250mm，右端+75mm

1.2 材料属性

- 混凝土的弹性模量： $E_c = 25\text{GPa}$
- 混凝土的剪切模量： $G_c = 10\text{GPa}$
- 预应力钢筋的弹性模量： $E_p = 200\text{GPa}$

1.3 截面常数

- 混凝土梁的横截面面积： $A_c = BH = 337500\text{mm}^2$
- 混凝土梁的截面惯性矩： $I = BH^3 / 12 = 1.582 \times 10^{10} \text{mm}^4$
- 混凝土梁的剪切面积： $A_s = 5A_c / 6 = 281250\text{mm}^2$
- 预应力钢筋的横截面面积： $A_p = 1000\text{mm}^2$

1.4 边界条件

如图 1 所示，忽略平面外的平动和转动自由度，结构的有效自由度为 UX、UZ 和 RY。简支梁左端节点约束平动自由度 UX 和 UZ，右端节点仅约束平动自由度 UZ。

1.5 施加荷载

如图 1 所示，本例采用后张法张拉预应力钢筋的左端，预拉力 $T=1000\text{kN}$ 。此外，本例仅考虑预应力钢筋弹性收缩和孔道摩擦引起的预应力损失，忽略锚具变形、混凝土收缩和徐变以及预应力钢筋应力松弛产生的预应力损失。

关于孔道摩擦引起的预应力损失，预应力钢筋与孔道壁之间的摩擦系数（即曲率系数）为 0.15，考虑孔道单位长度局部偏差的摩擦系数（即摆动系数）为 0.004/m。

2 理论计算

以混凝土简支梁轴线的最左端作为坐标原点，自左向右为 x 轴正方向。根据预应力钢筋在简支梁左端、右端和跨中截面处的偏心距，计算预应力钢筋的抛物线方程及其左右两端的斜率和转角。具体计算过程如下：

- 预应力钢筋的抛物线方程

$$e(x) = \left(\frac{1650}{9000^2}\right)x^2 - \left(\frac{1825}{9000}\right)x + 75$$

- 预应力钢筋左端的斜率和转角

$$\text{斜率 } k_L = -0.2080, \quad \text{转角 } \theta_L = \text{Atan}(k_L) = -11.463^\circ = -0.200\text{rad}$$

- 预应力钢筋右端的斜率和转角

$$\text{斜率 } k_R = 0.1639, \quad \text{转角 } \theta_R = \text{Atan}(k_R) = 9.307^\circ = 0.1624\text{rad}$$

孔道局部偏差引起的预应力损失比为 $0.004 \times 9 = 0.036$ ，预应力钢筋与孔道壁之间的摩擦产生的预应力损失比为 $0.15 \times (\theta_R - \theta_L) = 0.05438$ ，据此计算预应力钢筋弹性收缩产生的预应力损失。具体计算过程如下：

- 预应力钢筋弹性收缩前简支梁左端的等效轴向荷载

$$N_{0L} = 1000 \cos(11.463^\circ) = 980\text{kN}$$

- 预应力钢筋弹性收缩前简支梁右端的等效轴向荷载

$$N_{0R} = 1000(1 - 0.05438 - 0.036) \cos(9.307^\circ) = 897.6\text{kN}$$

- 混凝土简支梁的轴向变形

$$\Delta_c = \frac{N_{0L} + N_{0R}}{2E_c A_c} L = 1.00\text{mm}$$

- 预应力钢筋弹性收缩产生的预应力损失

$$\frac{E_p A_p \Delta_c}{L} = 22.25\text{kN} \quad \text{或} \quad \frac{E_p \Delta_c}{L} = 22.25\text{MPa}$$

如图 2 所示，考虑上述三种预应力损失，计算预应力钢筋在简支梁左右两端的三个等效荷载分量。具体计算过程如下：

- 预应力钢筋弹性收缩后简支梁左端的等效荷载

$$N_L = (1000 - 22.25) \cos(11.463^\circ) = 958.25\text{kN}$$

$$V_L = (1000 - 22.25) \sin(11.463^\circ) = 194.31\text{kN}$$



$$M_L = 250\text{mm} \times N_L = 239.56\text{kN} \cdot \text{m}$$

- 预应力钢筋弹性收缩后简支梁右端的等效荷载

$$N_R = (1000(1 - 0.05438 - 0.036) - 22.25)\cos(9.307^\circ) = 875.69\text{kN}$$

$$V_R = (1000(1 - 0.05438 - 0.036) - 22.25)\sin(9.307^\circ) = 143.51\text{kN}$$

$$M_R = 75\text{mm} \times N_R = 65.68\text{kN} \cdot \text{m}$$

为简化计算，本例假设简支梁内部的等效荷载均匀分布，如图 2 所示。该假设会引入一定的计算误差，全部等效荷载无法组成自平衡体系，存在微小（约 6kN）的竖向支座反力。具体计算过程如下：

- 轴向均布荷载

$$\frac{N_L - N_R}{L} = 9.17\text{kN} / \text{m}$$

- 竖向均布荷载

$$\frac{V_L + V_R}{L} = 37.54\text{kN} / \text{m}$$

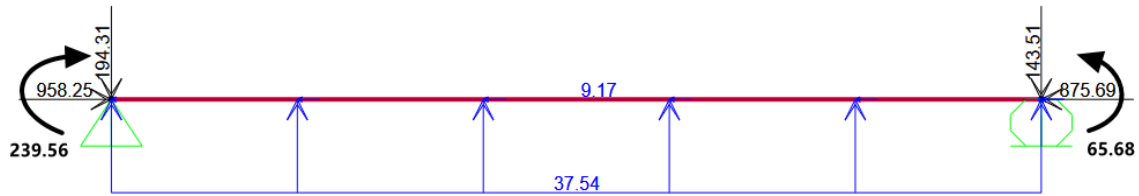


图 2 预应力钢筋的等效荷载示意图

如图 2 所示，根据预应力钢筋的等效荷载计算跨中截面的弯矩、挠度以及顶部和底部的正应力。具体计算过程如下：

- 根据静定结构的平衡方程计算跨中截面的弯矩

$$M_c = 65.68 + 37.54 \times 4.5^2 / 2 - 143.54 \times 4.5 - 6 \times 4.5 = -227\text{kN} \cdot \text{m}$$

- 根据跨中截面的弯矩和轴力计算顶部和底部的正应力

$$\sigma_{top} = \frac{M_c}{I} \frac{H}{2} + \frac{N_R + N_L}{2A_c} = 2.675\text{MPa} (\text{拉应力})$$

$$\sigma_{bot} = -\frac{M_c}{I} \frac{H}{2} + \frac{N_R + N_L}{2A_c} = -8.109\text{MPa} (\text{压应力})$$

- 利用单位荷载法计算跨中截面的挠度，同时考虑弯曲变形和剪切变形。

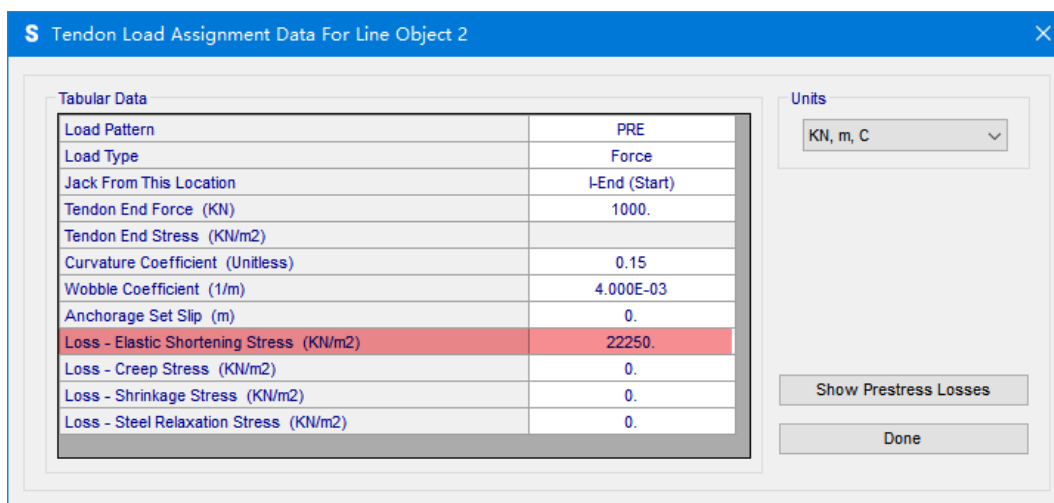
$$U_z = \int_0^L \frac{\bar{M}M_P}{E_c I} dx + \int_0^L \frac{\bar{F}_S F_{SP}}{G_c A_s} dx = 4.34\text{mm} (\text{反拱})$$

3 SAP2000 各种单元的计算结果分析及其与理论解的对比

预应力钢筋在 SAP2000 中可采用两种模拟方法，即：荷载法和单元法。荷载法以等效荷载的方式计算结构响应，忽略钢筋本身的刚度、质量和重量，仅适用于线性分析。单元法以钢束单元的等效应变荷载计算结构响应，可以考虑钢筋本身的刚度、质量和重量，也可用于非线性分析。

有限元案例分析

由于本例为线性分析，故上述两种方法均适用，后续也会对比两种方法的计算结果。采用荷载法时，用户应输入钢筋弹性收缩产生的预应力损失，如下所示。采用单元法时，SAP2000 自动计算钢筋弹性收缩产生的预应力损失，用户输入 0 即可。



3.1 框架单元

SAP2000 框架单元适用于三维空间的梁、柱、支撑等杆件，约束面外自由度后可简化为平面梁单元。平面梁单元由两个节点组成，每个节点有三个自由度，包括两个平动自由度和一个转动自由度。

为了快速准确地输出跨中截面的计算结果，建议将简支梁二等分生成中间节点，但无需进一步细化以增加单元数量。预应力钢筋的最大离散化长度会影响等效荷载和钢束单元的计算精度，荷载法采用的最大离散化长度为 1.5m，单元法采用的最大离散化长度为 1.5m 和 0.3m。

如表 1 所示，荷载法的计算精度略低于单元法；随着预应力钢筋的最大离散化长度逐步减小，单元法的计算精度逐步提高。

表 1 框架单元的计算结果

模拟方法	计算结果	SAP2000	理论解	误差
荷载法	跨中挠度	4.46	4.34	2.8%
单元法 (1.5m)		4.26		-1.8%
单元法 (0.3m)		4.34		0.0%
荷载法	跨中弯矩	-234	-227	3.1%
单元法 (1.5m)		-230		1.3%
单元法 (0.3m)		-227		0.0%

3.2 薄壳单元

薄壳单元由薄板单元和膜单元组合而成，包括三节点三角形单元和四节点四边形单元，每个节点有三个平动自由度和三个转动自由度。

有限元案例分析

为了提高壳单元的计算精度，本例采用的网格密度为“沿高度 4 等分，沿跨度 10 等分”。荷载法和单元法采用的预应力钢筋的最大离散化长度均为 0.3m。

如表 2 所示，SAP2000 薄壳单元的计算结果与理论解之间的微小误差与理论计算中采用的“简支梁内部的等效均布荷载”假定有关。

表 2 薄壳单元的计算结果

模拟方法	计算结果	SAP2000	理论解	误差
荷载法	跨中挠度	4.31	4.34	-0.7%
单元法		4.21		-3.0%
荷载法	顶部正应力	2.723	2.675	1.8%
单元法		2.643		-1.2%
荷载法	底部正应力	-8.235	-8.109	1.6%
单元法		-8.004		-1.3%

3.3 厚壳单元

厚壳单元的主要力学性能与薄壳单元相同，但可以更准确地考虑横向剪切变形对计算结果的影响。本例不涉及壳单元的横向剪切变形，在网格密度和预应力钢筋的最大离散化长度均相同的情况下，厚壳单元的计算结果与薄壳单元完全相同，如表 3 所示。

表 3 厚壳单元的计算结果

模拟方法	计算结果	SAP2000	理论解	误差
荷载法	跨中挠度	4.31	4.34	-0.7%
单元法		4.21		-3.0%
荷载法	顶部正应力	2.723	2.675	1.8%
单元法		2.643		-1.2%
荷载法	底部正应力	-8.235	-8.109	1.6%
单元法		-8.004		-1.3%

3.4 实体单元

实体单元属于空间连续体单元，每个节点有三个平动自由度，无转动自由度。由于简支梁以弯曲变形为主，故采用非协调实体元提高计算精度。

为了提高实体单元的计算精度，本例采用的网格密度为“沿高度 4 等分，沿跨度 10 等分，沿厚度 2 等分”。荷载法和单元法采用的预应力钢筋的最大离散化长度均为 0.3m。另外，实体模型的有效自由度应修改为全部六个自由度，防止厚度方向的约束产生泊松效应影响计算精度。

如表 4 所示，SAP2000 实体单元的计算结果与理论解之间的微小误差与理论计算中采用的“简支梁内部的等效均布荷载”假定有关。

有限元案例分析

表 4 实体单元的计算结果

模拟方法	计算结果	SAP2000	理论解	误差
荷载法	跨中挠度	4.30	4.34	-0.9%
单元法		4.20		-3.2%
荷载法	顶部正应力	2.629	2.675	-1.7%
单元法		2.549		-4.7%
荷载法	底部正应力	-8.151	-8.109	0.5%
单元法		-7.920		-2.3%

