

大位移分析（一）：框架单元的轴向变形

1 模型信息

如图 1 所示，本例采用 SAP2000 框架单元以非线性静力分析计算“二元体”在集中力作用下的大位移效应和支座处的竖向反力。

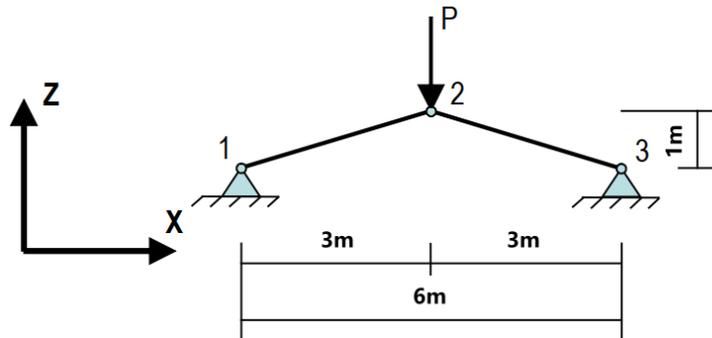


图 1 集中力作用下的“二元体”示意图

1.1 几何尺寸

- 高度： $H_0=1\text{m}$
- 跨度： $S=6\text{m}$ ， $S/2=3\text{m}$

1.2 材料属性

- 弹性模量： $E=200\text{GPa}$
- 泊松比： $\nu=0.3$

1.3 截面常数

- 截面型号：HW350X350X19X19
- 横截面面积： $A=19639\text{mm}^2$

1.4 边界条件

如图 1 所示，忽略平面外的平动和转动自由度，结构的有效自由度为 UX、UZ 和 RY。
#1 和 #3 节点约束平动自由度 UX 和 UZ，左杆（或右杆）在 #2 节点处释放杆端弯矩。

1.5 施加荷载

如图 1 所示，作用于 #2 节点的集中力 P 从 1kN 开始逐步增加，直至 #2 节点的竖向位移达到 0.3m，即：变形后的结构高度 $H=H_0-0.3=0.7\text{m}$ 。

2 理论计算

SAP2000 中的大位移分析基于结构变形后的几何形状建立几何方程和平衡方程，但物理方程仍基于小应变假定。注意，大位移不等于大应变，大应变会改用不同的物理方程。

如图 2 所示，以 #2 节点的竖向位移达到 0.3m 时的结构体系作为研究对象，则有：

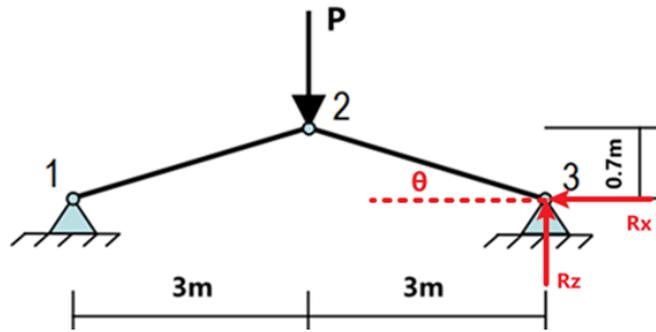


图 2 集中力作用下变形后的“二元体”示意图

1. 利用几何关系计算压杆的缩短量

$$\Delta L = L_0 - L = \sqrt{3^2 + 1^2} - \sqrt{3^2 + 0.7^2} = 81.7\text{mm}$$

2. 利用物理关系计算压杆的轴向压力

$$F_N = EA \frac{\Delta L}{L_0} = 101478\text{kN}$$

3. 利用平衡关系计算支座处的竖向反力

$$R_z = F_N \sin \theta = F_N \frac{0.7}{\sqrt{3^2 + 0.7^2}} = 23059\text{kN}$$

3 SAP2000 框架单元的计算结果分析及其与理论解的对比

SAP2000 框架单元适用于三维空间的梁、柱、支撑等杆件，约束面外自由度后可简化为平面梁单元，释放端部弯矩后可进一步简化为平面杆单元。平面梁单元由两个节点组成，每个节点有三个自由度，包括两个平动自由度和一个转动自由度。

为了提高非线性分析的计算精度，本例将非线性迭代的收敛容差提高为 $1.0\text{E-}6$ 。如表 1 所示，在考虑大位移效应的非线性分析中，每个杆件仅采用一个框架单元即可达到非常高的计算精度。

表 1 框架单元的计算结果

计算结果	SAP2000	理论解	误差
支座处的竖向反力	23057	23059	0.0%

大位移分析（二）：框架单元的弯曲变形

1 模型信息

如图 1 所示，本例采用 SAP2000 框架单元以非线性静力分析计算悬臂梁在顶部集中力矩作用下的位移效应和支座处的反力矩。

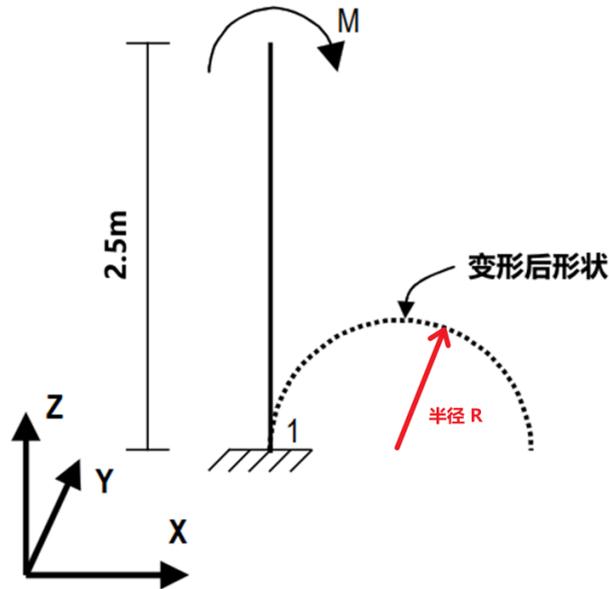


图 1 集中力矩作用下的悬臂梁示意图

1.1 几何尺寸

- 高度：H=2.5m

1.2 材料属性

- 弹性模量： $E = 200GPa$
- 泊松比： $\nu = 0.3$

1.3 截面常数

- 截面型号：HW100X100X6X8
- 截面惯性矩： $I=3780000mm^4$

1.4 边界条件

如图 1 所示，忽略平面外的平动和转动自由度，结构的有效自由度为 UX、UZ 和 RY。柱底节点约束全部自由度 UX、UZ 和 RY。

1.5 施加荷载

如图 1 所示，顶部集中力矩 M 从 $1kN \cdot m$ 开始逐步增加，直至顶部截面的转角达到 180° （弧度： π ）。

2 理论计算

如图 1 所示，悬臂梁的纯弯曲变形曲线为圆弧线，变形后的半圆形弧长 $L=H=2.5\text{m}$ ，半径 $R=L/\pi$ ，曲率 $1/R=\pi/L$ ，且外力矩=反力矩=各截面弯矩。依此计算顶部的水平和竖向位移以及截面弯矩，具体如下：

- 顶部截面的水平位移 $U_x=2R=2L/\pi=1.5915\text{m}$ ；
- 顶部截面的竖向位移 $U_z=2.5\text{m}$ ；
- 根据曲率和弯矩之间的物理关系计算截面弯矩 $M=EI\pi/L=950\text{kN}\cdot\text{m}$ 。

3 SAP2000 框架单元的计算结果分析及其与理论解的对比

SAP2000 框架单元适用于三维空间的梁、柱、支撑等杆件，约束面外自由度后可简化为平面梁单元。平面梁单元由两个节点组成，每个节点有三个自由度，包括两个平动自由度和一个转动自由度。

为了提高非线性分析的计算精度，本例将非线性迭代的收敛容差提高为 $1.0\text{E}-6$ 。如表 1 所示，在考虑大位移效应的非线性分析中，悬臂梁采用 4 个框架单元即可达到非常高的计算精度；随着单元数量的增加，计算精度可无限逼近理论解。

表 1 框架单元的计算结果

单元数量	计算结果	SAP2000	理论解	误差
4	顶部水平位移 U_x	1.6332	1.5915	2.6%
	顶部竖向位移 U_z	2.5	2.5	0.0%
	截面弯矩 M	950	950	0.0%
16	顶部水平位移 U_x	1.5941	1.5915	0.2%
	顶部竖向位移 U_z	2.5	2.5	0.0%
	截面弯矩 M	950	950	0.0%
64	顶部水平位移 U_x	1.5917	1.5915	0.0%
	顶部竖向位移 U_z	2.5	2.5	0.0%
	截面弯矩 M	950	950	0.0%



大位移分析（三）：壳单元的面内变形

1 模型信息

如图 1 所示，本例分别采用 SAP2000 中的薄壳单元和厚壳单元，以非线性静力分析计算斜板“二元体”在集中力作用下的大位移效应和支座处的竖向反力。

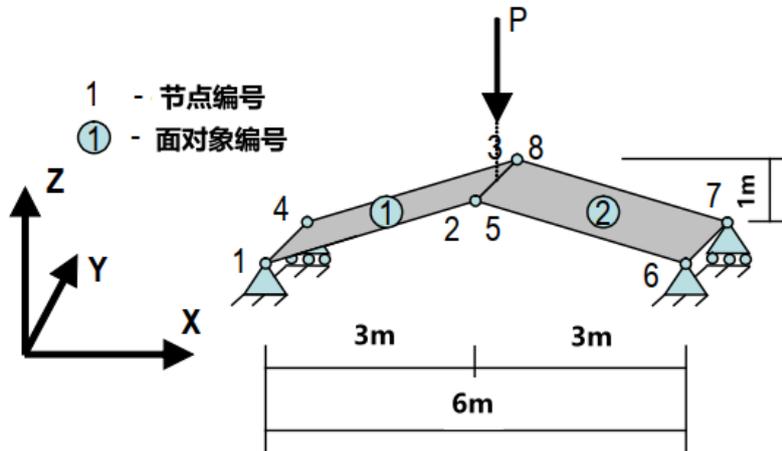


图 1 集中力作用下的斜板“二元体”示意图

1.1 几何尺寸

- 高度： $H_0=1\text{m}$
- 跨度： $S=6\text{m}$ ， $S/2=3\text{m}$

1.2 材料属性

- 弹性模量： $E = 25\text{GPa}$
- 泊松比： $\nu = 0.3$

1.3 截面常数

- 厚度： $t = 25\text{mm}$
- 宽度： $B = 300\text{mm}$
- 横截面面积： $A = Bt = 7500\text{mm}^2$

1.4 边界条件

如图 1 所示，#1 和#6 节点约束全部三个平动自由度 U_X 、 U_Y 和 U_Z ；#4、#7 节点仅约束 U_X 和 U_Z ，保持 Y 向自由变形可防止斜板的泊松效应影响计算结果。

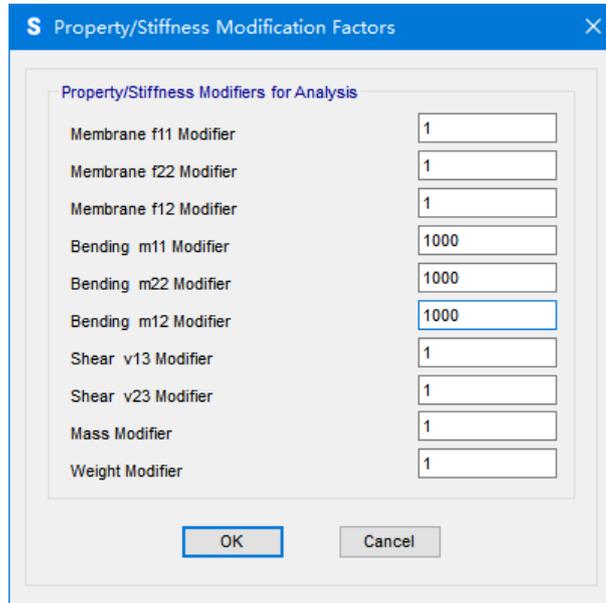
选择斜板上部的两个节点，点击【编辑>编辑点>断开节点】命令，可生成几何位置重合的两对（四个）节点，即图 1 中“#2、#5”节点对和“#3、#8”节点对。

为了定义两个斜板之间的铰接，用户可对“#2、#5”节点对和“#3、#8”节点对分别指定刚体约束（仅勾选三个平动自由度），保证几何位置重合的两个节点具有相同的平动位移，但转动位移相互独立。

1.5 施加荷载

如图 1 所示，作用于两个斜板交界处的集中力 P 从 1kN 开始逐步增加，直至斜板交界处的竖向位移达到 0.3m ，即：变形后的结构高度 $H=H_0-0.3=0.7\text{m}$ 。注意，斜板交界处共存在四个节点，每个节点分配的集中力为 $P/4$ 。

此外，为了防止在大位移分析中出现斜板的平面外屈曲，建议修改壳单元的抗弯和抗扭刚度。如下所示， m_{11} 、 m_{22} 和 m_{12} 均放大 1000 倍即可。



2 理论计算

本例的理论计算和前文“大位移分析（一）：框架单元的轴向变形”完全相同，但弹性模量和横截面面积的取值不同。具体如下：

1. 利用几何关系计算压杆的缩短量

$$\Delta L = L_0 - L = \sqrt{3^2 + 1^2} - \sqrt{3^2 + 0.7^2} = 81.7\text{mm}$$

2. 利用物理关系计算压杆的轴向压力

$$F_N = EA \frac{\Delta L}{L_0} = 4844\text{kN}$$

3. 利用平衡关系计算支座处的竖向反力

$$R_z = F_N \sin \theta = F_N \frac{0.7}{\sqrt{3^2 + 0.7^2}} = 1101\text{kN}$$

3 SAP2000 壳单元的计算结果分析及其与理论解的对比

SAP2000 薄壳单元由薄板单元和膜单元组合而成，包括三节点三角形单元和四节点四边形单元，每个节点有三个平动自由度和三个转动自由度。厚壳单元的主要力学性能与薄壳单元相同，但可以更准确地考虑横向剪切变形对计算结果的影响。

有限元案例分析

为了提高非线性分析的计算精度，本例将非线性迭代的收敛容差提高为 $1.0E-6$ 。如表 1 所示，在考虑大位移效应的非线性分析中，每个斜板仅采用一个壳单元即可达到非常高的计算精度。

表 1 薄壳单元和厚壳单元的计算结果

计算结果	单元类型	SAP2000	理论解	误差
支座处的竖向反力	薄壳单元	1102	1101	0.0%
	厚壳单元	1102	1101	0.0%

大位移分析（四）：壳单元的弯曲变形

1 模型信息

如图 1 所示，本例分别采用 SAP2000 中的薄壳单元和厚壳单元，以非线性静力分析计算悬臂壳在顶部集中力矩作用下的大位移效应和支座处的反力矩。

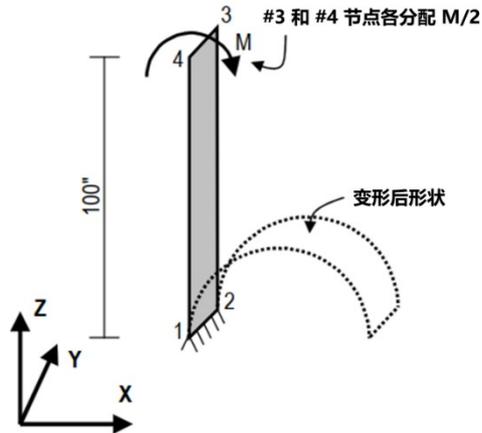


图 1 集中力矩作用下的悬臂壳示意图

1.1 几何尺寸

- 高度： $H=2.5\text{m}$
- 宽度： $B=300\text{mm}$
- 厚度： $t=25\text{mm}$

1.2 材料属性

- 弹性模量： $E = 25\text{GPa}$
- 泊松比： $\nu = 0.3$

1.3 截面常数

- 截面惯性矩： $I=390625\text{mm}^4$

1.4 边界条件

如图 1 所示，墙底两个节点约束全部六个自由度。

1.5 施加荷载

如图 1 所示，顶部集中力矩 M 从 $1\text{kN}\cdot\text{m}$ 开始逐步增加，直至顶部截面的转角达到 180° （弧度： π ）。注意，顶部每个节点分配的集中力矩为 $M/2$ 。

2 理论计算

本例的理论计算和前文“大位移分析（二）：框架单元的弯曲变形”完全相同，但弹性模量和截面惯性矩的取值不同。具体如下：



- 顶部截面的水平位移 $U_x=2R=2L/\pi=1.5915\text{m}$;
- 顶部截面的竖向位移 $U_z=2.5\text{m}$;
- 根据曲率和弯矩之间的物理关系计算截面弯矩 $M=EI\pi/L=12.27\text{kN}\cdot\text{m}$ 。

3 SAP2000 壳单元的计算结果分析及其与理论解的对比

SAP2000 薄壳单元由薄板单元和膜单元组合而成，包括三节点三角形单元和四节点四边形单元，每个节点有三个平动自由度和三个转动自由度。厚壳单元的主要力学性能与薄壳单元相同，但可以更准确地考虑横向剪切变形对计算结果的影响。

为了提高非线性分析的计算精度，本例将非线性迭代的收敛容差提高为 $1.0\text{E-}6$ 。如表 1 和表 2 所示，在考虑大位移效应的非线性分析中，随着单元数量的增加，薄壳或厚壳单元的计算精度均逐步接近理论解。

表 1 薄壳单元的计算结果

单元数量	计算结果	SAP2000	理论解	误差
1x4	顶部水平位移 U_x	1.6134	1.5915	1%
	顶部竖向位移 U_z	2.5	2.5	0%
	截面弯矩 M	12.38	12.27	1%
1x16	顶部水平位移 U_x	1.5811	1.5915	-1%
	顶部竖向位移 U_z	2.5	2.5	0%
	截面弯矩 M	12.30	12.27	0%
1x64	顶部水平位移 U_x	1.5796	1.5915	-1%
	顶部竖向位移 U_z	2.5	2.5	0%
	截面弯矩 M	12.30	12.27	0%

表 2 厚壳单元的计算结果

单元数量	计算结果	SAP2000	理论解	误差
1x4	顶部水平位移 U_x	1.6132	1.5915	1%
	顶部竖向位移 U_z	2.5	2.5	-1%
	截面弯矩 M	12.39	12.27	1%
1x16	顶部水平位移 U_x	1.5794	1.5915	-1%
	顶部竖向位移 U_z	2.5	2.5	0%
	截面弯矩 M	12.32	12.27	0%
1x64	顶部水平位移 U_x	1.5775	1.5915	-1%
	顶部竖向位移 U_z	2.5	2.5	0%
	截面弯矩 M	12.32	12.27	0%