

## 屈曲分析（一）：平面框架

## 1 模型信息

如图 1 所示，本例采用 SAP2000 框架单元计算集中荷载作用下平面框架的面内屈曲荷载，同时对比不同单元数量对计算精度的影响。

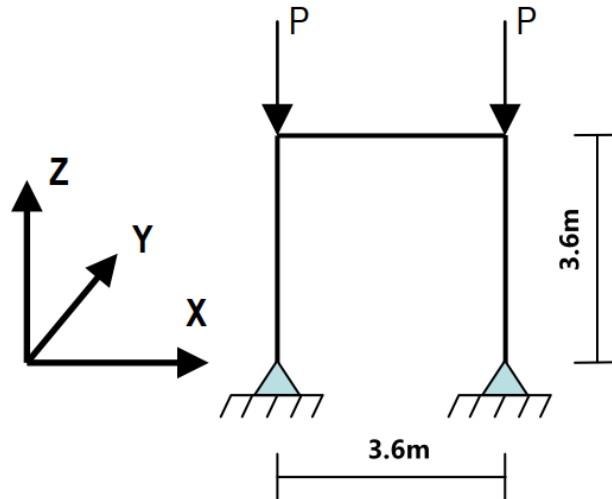


图 1 集中荷载作用下的平面框架示意图

## 1.1 几何尺寸

- 高度： $H=3.6\text{m}$
- 跨度： $L=3.6\text{m}$
- 梁柱截面：HW200x200x8x12

## 1.2 材料属性

- 弹性模量： $E = 200\text{GPa}$
- 泊松比： $\nu = 0.3$

## 1.3 截面常数

- 截面面积： $A = 6353\text{mm}^2$
- 截面惯性矩： $I = 4717 \times 10^4 \text{mm}^4$

## 1.4 边界条件

如图 1 所示，忽略平面外的平动和转动自由度，结构的有效自由度为 UX、UZ 和 RY，同时约束柱底的三个平动自由度。

## 1.5 施加荷载

如图 1 所示，柱顶集中荷载  $P=1\text{kN}$ 。

## 2 理论计算

根据材料力学中理想中心压杆的稳定分析方法，计算平面框架在集中荷载作用下的屈曲荷载。具体如下：

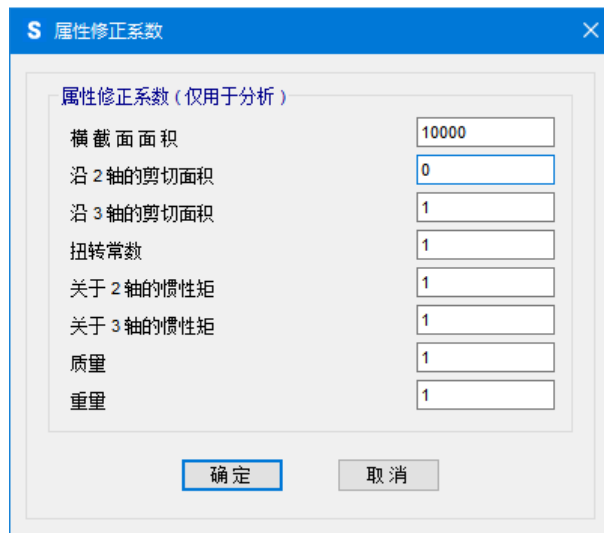
$$kL \tan kL = \frac{6H}{L} = 6 \Rightarrow kL = 1.34955$$

$$P_{cr} = \frac{(kL)^2 EI}{H^2} = 1325.8kN$$

## 3 SAP2000 框架单元的计算结果分析及其与理论解的对比

框架单元适用于三维空间的梁、柱、支撑等杆件，约束面外自由度后可简化为平面梁单元。平面梁单元由两个节点组成，每个节点有三个自由度，包括两个平动自由度和一个转动自由度。

SAP2000 框架单元采用铁木辛柯梁理论，默认考虑横向剪切变形和轴向拉压变形。但前述理论计算采用欧拉梁理论，忽略以上两种变形。因此，框架截面的剪切面积的修正系数应输入 0，即剪切刚度无穷大；横截面面积可放大 10000 倍，即拉压刚度趋于无穷大，如下所示。



如表 1 所示，梁柱构件仅采用一个框架单元即可达到非常高的计算精度，适当增加单元数量后可进一步提高计算精度。

表 1 框架单元的计算结果

计算结果	单元数量	SAP2000	理论解	误差
屈曲荷载	1	1329.6	1325.8	0.28%
	2	1326.0		0.02%
	4	1325.8		0.00%



## 屈曲分析（二）：平面外屈曲

## 1 模型信息

如图 1 所示，本例分别采用 SAP2000 中的薄壳单元和厚壳单元，计算方形板在面内剪应力和正应力作用下的面外屈曲应力，同时对比不同网格密度对计算精度的影响。

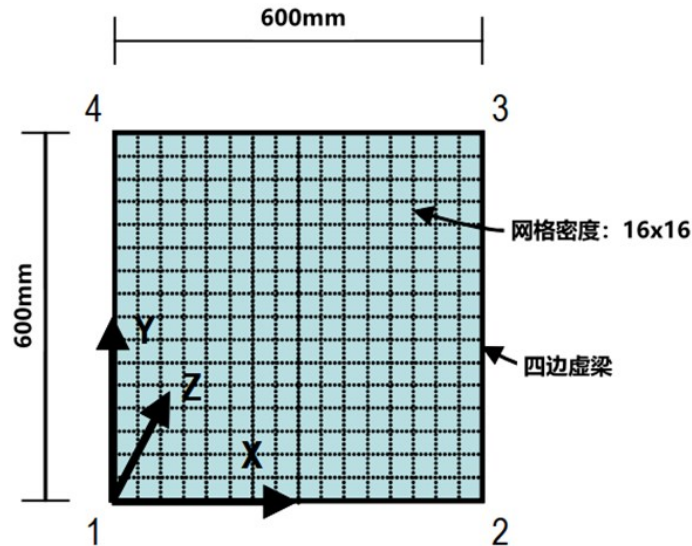


图 1 方形板的几何尺寸和网格密度

## 1.1 几何尺寸

- 边长：  $L = 600mm$
- 厚度：  $t = 25mm$

## 1.2 材料属性

- 弹性模量：  $E = 200GPa$
- 泊松比：  $\nu = 0.3$

## 1.3 边界条件

如图 1 所示，方形板的四边约束面外（即 Z 向）的平动自由度 UZ。在此基础上，为了约束面内（即 XY 平面）的刚体平动和刚体转动，#1 角节点约束面内的两个平动自由度 UX 和 UY，#2 角节点约束面内的平动自由度 UY。

## 1.4 施加荷载

如图 2 所示，方形板四边施加的剪应力和正应力最大值分别为  $\tau = \sigma = 1MPa$ 。由于 SAP2000 无法直接施加应力荷载，本例采用图 1 所示的虚梁将应力荷载转换为线荷载。

虚梁即无质量、无刚度的框架单元，仅用于传递荷载。建议任意定义一个框架截面作为虚梁截面，然后将属性修正系数全部修改为零。

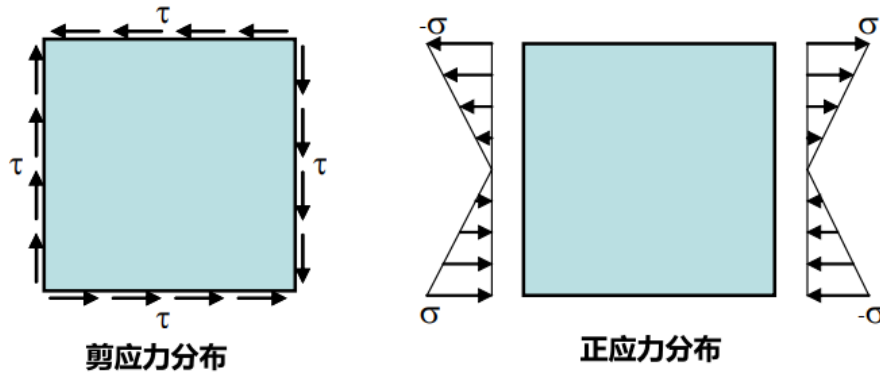


图 2 方形板四边的应力分布

考虑到方形板的厚度为 25mm， $\tau = \sigma = 1MPa$  对应的线荷载为 25N/mm。如果方形板的厚度为 0.25mm，则线荷载为 0.25N/mm。

## 2 理论计算

根据弹性力学的薄板弯曲小挠度理论，计算薄板的抗弯刚度为：

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = 286172N \cdot m$$

根据《板壳理论》（铁摩辛柯&沃诺斯基 著）中的表格和公式，计算方形板的面外屈曲应力。具体如下：

- 面外屈曲的临界剪应力

$$\tau_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{L^2 t} (k = 9.34) = 2931MPa$$

- 面外屈曲的临界正应力

$$\sigma_{cr} = k \frac{\pi^2 D}{L^2 t} (k = 25.6) = 8034MPa$$

## 3 SAP2000 各类单元的计算结果分析及其与理论解的对比

### 3.1 薄壳单元

薄壳单元由薄板单元和膜单元组合而成，包括三节点三角形单元和四节点四边形单元，每个节点有三个平动自由度和三个转动自由度。如表 1 所示，随着网格密度的增加，SAP2000 薄壳单元的计算结果逐步逼近理论解

表 1 薄壳单元的计算结果

计算结果	网格密度	SAP2000	理论解	误差
屈曲剪应力 $\tau_{cr}$	16x16	3001	2931	2.4%
	64x64	2931		0.0%
屈曲正应力 $\sigma_{cr}$	16x16	8133	8034	1.2%
	64x64	8019		-0.2%



### 3.2 厚壳单元

厚壳单元的主要力学性能与薄壳单元相同，但可以更准确地考虑横向剪切变形对计算结果的影响。如表 2 所示，SAP2000 厚壳单元的计算结果均小于理论值，随着网格密度的增加，计算精度不增反减。

表 2 厚壳单元的计算结果

计算结果	网格密度	SAP2000	理论解	误差
屈曲剪应力 $\tau_{cr}$	16x16	2866	2931	-2.2%
	64x64	2813		-4.0%
屈曲正应力 $\sigma_{cr}$	16x16	7732	8034	-3.8%
	64x64	7672		-4.5%

### 3.3 误差分析

前述理论计算和薄壳单元均基于薄板小挠度理论，忽略横向剪切变形，二者的计算结果可以无限逼近。但是，对于边长 600mm 和厚度 25mm 的方形板（宽厚比仅为 24），忽略横向剪切变形可能会引入一定的计算误差。

换言之，厚壳单元的计算结果其实更趋于“理论解”，且随着网格密度的增加而逐步逼近“理论解”，但是本例并未通过理论计算获取这个“理论解”。

如果将方形板的厚度减小为 0.25mm，宽厚比更符合薄板理论的几何假定。此时，忽略横向剪切变形引入的误差更小，薄壳单元和厚壳单元均可逼近理论解，如表 3 所示。

表 3 薄壳和厚壳单元的计算结果

计算结果	网格密度	单元类型	SAP2000	理论解	误差
屈曲剪应力 $\tau_{cr}$	64x64	薄壳	0.2931	0.2931	0.0%
		厚壳	0.2930		0.0%
屈曲正应力 $\sigma_{cr}$		薄壳	0.8019	0.8034	-0.2%
		厚壳	0.8017		-0.2%

## 屈曲分析（三）：平面内屈曲

### 1 模型信息

如图 1 所示，本例分别采用 SAP2000 中的薄壳单元和厚壳单元，计算悬臂柱在柱顶集中荷载作用下的面内屈曲荷载。

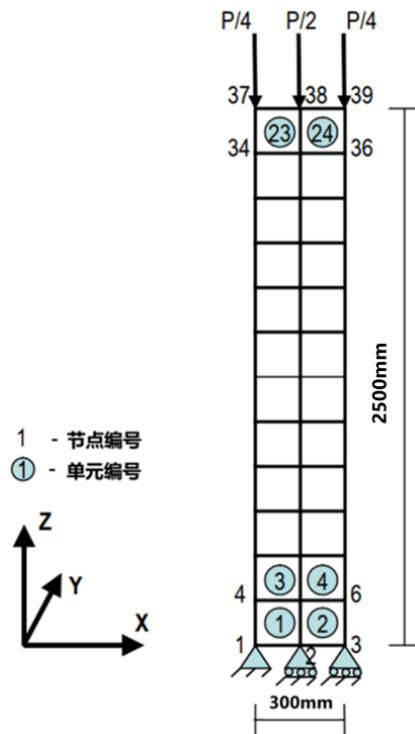


图 1 悬臂柱的几何尺寸和网格密度

#### 1.1 几何尺寸

- 高度：  $H = 2500\text{mm}$
- 宽度：  $B = 300\text{mm}$
- 厚度：  $t = 25\text{mm}$
- 截面惯性矩：  $I = tB^3 / 12 = 5.625 \times 10^7 \text{mm}^4$

#### 1.2 材料属性

- 弹性模量：  $E = 25\text{GPa}$
- 泊松比：  $\nu = 0.3$

#### 1.3 边界条件

如图 1 所示，忽略平面外的平动和转动自由度，结构的有效自由度为 UX、UZ 和 RY。对于柱底的三个节点，#1 节点约束 UX 和 UZ，#2 和#3 节点约束 UZ。

## 1.4 施加荷载

如图 1 所示，柱顶集中荷载  $P=1kN$ ，#37 和#38 两个端节点各分配 1/4，#38 中间节点分配 1/2。

## 2 理论计算

根据材料力学中理想中心压杆的稳定分析方法，计算悬臂柱在柱顶集中荷载作用下的面内屈曲荷载。具体如下：

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2H)^2} = 555kN$$

## 3 SAP2000 各类单元的计算结果分析及其与理论解的对比

薄壳单元由薄板单元和膜单元组合而成，包括三节点三角形单元和四节点四边形单元，每个节点有三个平动自由度和三个转动自由度。厚壳单元的主要力学性能与薄壳单元相同，但可以更准确地考虑横向剪切变形对计算结果的影响。

如表 1 所示，SAP2000 薄壳和厚壳单元的计算结果基本相同，与理论解之间的误差也很小，加密网格应该可以进一步提高计算精度。

表 1 薄壳单元和厚壳单元的计算结果

单元类型	网格密度	SAP2000	理论解	误差
薄壳单元	2x12	553	555	-0.4%
厚壳单元	2x12	553	555	-0.4%

## 屈曲分析（四）：实体柱

### 1 模型信息

如图 1 所示，本例采用 SAP2000 实体单元计算悬臂柱在柱顶集中荷载作用下，关于强轴（Y 轴）和弱轴（X 轴）的屈曲荷载。

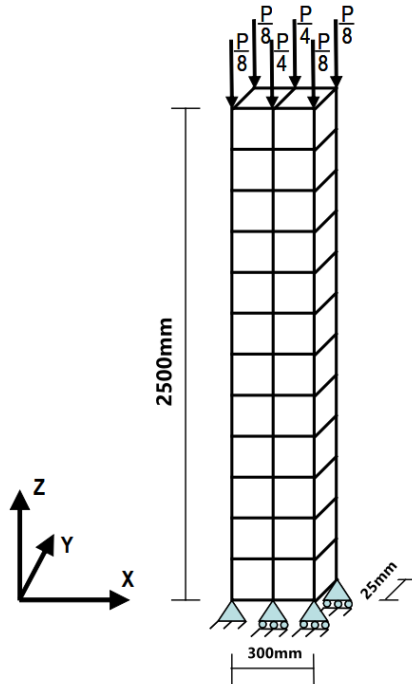


图 1 悬臂柱的几何尺寸和网格密度

#### 1.1 几何尺寸

- 高度：  $H = 2500\text{mm}$
- 宽度：  $B = 300\text{mm}$
- 厚度：  $t = 25\text{mm}$
- 关于强轴的截面惯性矩：  $I_{\max} = tB^3 / 12 = 5.625 \times 10^7 \text{mm}^4$
- 关于弱轴的截面惯性矩：  $I_{\min} = Bt^3 / 12 = 390625\text{mm}^4$

#### 1.2 材料属性

- 弹性模量：  $E = 25\text{GPa}$
- 泊松比：  $\nu = 0.3$

#### 1.3 边界条件

如图 1 所示，柱底左侧两个节点约束三个平动自由度 UX、UY 和 UZ，柱底其余四个节点仅约束竖向平动自由度 UZ。

#### 1.4 施加荷载

如图 1 所示，柱顶集中荷载  $P=1\text{kN}$ ，两侧节点各分配  $1/8$ ，中间节点分配  $1/4$ 。





## 2 理论计算

根据材料力学中理想中心压杆的稳定分析方法，计算悬臂柱在柱顶集中荷载作用下关于强轴和弱轴的屈曲荷载。具体如下：

$$P_{cr-\max} = \frac{\pi^2 EI_{\max}}{(2H)^2} = 555kN$$

$$P_{cr-\min} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(2H)^2} = 3.85kN$$

## 3 SAP2000 实体单元的计算结果分析及其与理论解的对比

实体单元属于空间连续体单元，每个节点有三个平动自由度，无转动自由度。由于悬臂柱的屈曲形状以弯曲变形为主，故采用非协调实体元提高计算精度。

如表 1 所示，SAP2000 实体单元的计算结果与理论解之间的误差很小，加密网格应该可以进一步提高计算精度。

表 1 实体单元的计算结果

屈曲荷载	网格密度	SAP2000	理论解	误差
强轴	1x2x12	552	555	-0.5%
弱轴	1x2x12	3.87	3.85	0.6%