

弹性地基（一）：弹性地基梁

1 模型信息

如图 1 所示，本例采用 SAP2000 框架单元计算集中荷载作用下弹性地基梁的跨中挠度和跨中弯矩，同时对比不同单元数量对计算精度的影响。

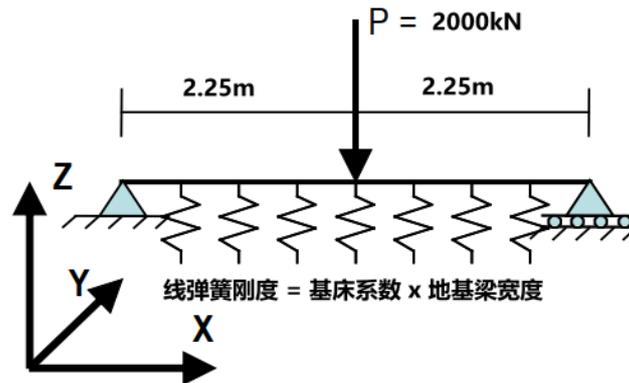


图 1 集中荷载作用下的弹性地基梁

1.1 几何尺寸

- 截面高度：H=900mm
- 截面宽度：B=900mm
- 截面惯性矩： $I=BH^3/12=546.75 \times 10^8 \text{mm}^4$
- 地基梁长度：L=4.5m

1.2 材料属性

- 弹性模量： $E = 25 \text{GPa}$
- 泊松比： $\nu = 0.2$
- 地基土的基床系数： $K = 130000 \text{kN/m}^3$

1.3 边界条件

如图 1 所示，地基梁的左端节点约束三个平动自由度，右端节点约束除轴向（X 向）外的两个平动自由度。沿地基梁的轴向指定竖向线弹簧，线弹簧的刚度等于地基土的基床系数与地基梁截面宽度的乘积，即：

$$k = KB = 130000 \times 0.9 = 117000 \text{kN/m}^2$$

1.4 施加荷载

如图 1 所示，忽略地基梁的自重，施加竖直向下的跨中集中荷载 P=2000kN。

2 理论计算

根据集中荷载作用下弹性地基梁挠曲线微分方程的理论解，计算地基梁的跨中挠度和跨中弯矩。具体如下：

- 中间参数

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} = 0.3825m^{-1}, \quad \alpha L = 0.3825 \times 4.5 = 1.721$$

- 跨中挠度

$$u_z = \frac{P\alpha \sinh \alpha L - \sin \alpha L}{2k \cosh \alpha L + \cos \alpha L} = 2.05mm$$

- 跨中弯矩

$$M_y = \frac{P \sinh \alpha L + \sin \alpha L}{4\alpha \cosh \alpha L + \cos \alpha L} = 1766kN \cdot m$$

3 SAP2000 框架单元的计算结果分析及其与理论解的对比

框架单元适用于三维空间的梁、柱、支撑等杆件，约束面外自由度后可简化为平面梁单元。平面梁单元由两个节点组成，每个节点有三个自由度，包括两个平动自由度和一个转动自由度。

由于框架单元采用铁木辛柯梁理论，默认考虑横向剪切变形；但前述理论计算采用欧拉梁理论，忽略横向剪切变形。因此，框架截面的剪切面积的修正系数应输入零，即梁的剪切刚度无穷大，剪切变形为零。

如表 1 所示，仅采用两个框架单元无法准确模拟均匀分布的地基土，计算误差较大；但适当增加单元数量（如 8 个）即可显著提高计算精度。

表 1 框架单元的计算结果

位移或内力	单元数量	SAP2000	理论值	误差
跨中挠度 u_z	2	2.03	2.05	-0.9%
	8	2.05		0.0%
	200	2.05		0.0%
跨中弯矩 M_y	2	1648	1766	-6.7%
	8	1760		-0.4%
	200	1766		0.0%



弹性地基（二）：弹性地基板

1 模型信息

如图 1 所示，本例分别采用 SAP2000 中的薄壳单元、厚壳单元和实体单元，计算集中荷载作用下弹性地基板的中心点挠度。

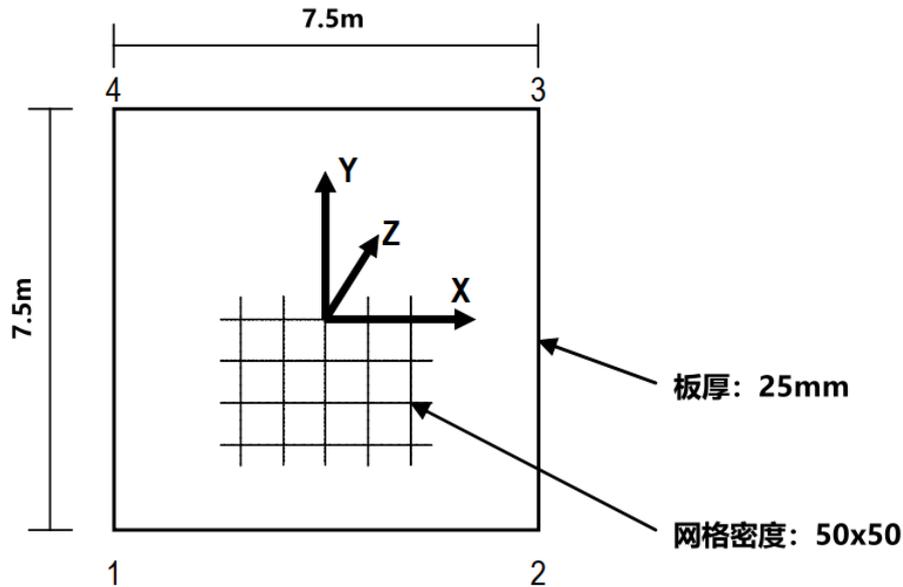


图 1 弹性地基板的几何尺寸

1.1 几何尺寸

- 长度： $L = 7.5m$
- 宽度： $W = 7.5m$
- 厚度： $t = 25mm$

1.2 材料属性

- 弹性模量： $E = 200GPa$
- 泊松比： $\nu = 0.3$
- 地基土的基床系数： $K = 4700$ 或 $125000kN/m^3$

1.3 边界条件

如图 1 所示，假设地基板放置在无限大的弹性地基上，在竖向（Z 向）荷载作用下仅考虑弯曲变形，忽略面内变形。根据不同的单元类型，用户可设置不同的有效自由度。

- 薄壳和厚壳单元：结构分析的有效自由度为“UZ, RX, RY”；
- 实体单元：结构分析的有效自由度为“UX, UY, UZ”。

此外，用户需要对地基板指定竖向面弹簧，面弹簧的刚度即地基土的基床系数。

1.4 施加荷载

忽略地基板的自重，在中心点施加竖直向下的集中荷载 $P=200kN$ 。

2 理论计算

根据弹性力学的薄板弯曲小挠度理论，计算薄板的抗弯刚度为：

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = 286172N \cdot m$$

根据《板壳理论》（铁摩辛柯&沃诺斯基 著）中的公式（185），计算弹性地基板中心点处的最大挠度值。具体如下：

- 基床系数 $K = 4700kN / m^3$

$$u_z = \frac{P}{8\sqrt{DK}} = 21.56mm$$

- 基床系数 $K = 125000kN / m^3$

$$u_z = \frac{P}{8\sqrt{DK}} = 4.18mm$$

3 SAP2000 各类单元的计算结果分析及其与理论解的对比

3.1 薄壳单元

薄壳单元由薄板单元和膜单元组合而成，包括三节点三角形单元和四节点四边形单元，每个节点有三个平动自由度和三个转动自由度。如表 1 所示，SAP2000 薄壳单元的计算结果略大于理论解。

表 1 薄壳单元的计算结果

位移	基床系数	SAP2000	理论值	误差
中心点挠度 u_z	4700	21.74	21.56	0.8%
	125000	4.28	4.18	2.5%

3.2 厚壳单元

厚壳单元的主要力学性能与薄壳单元相同，但可以更准确地考虑横向剪切变形对计算结果的影响。如表 2 所示，SAP2000 厚壳单元的计算结果略大于解析解，计算精度高于薄壳单元。

表 2 厚壳单元的计算结果

位移	基床系数	SAP2000	理论值	误差
中心点挠度 u_z	4700	21.66	21.56	0.5%
	125000	4.18	4.18	0.0%

3.3 实体单元

实体单元属于空间连续体单元，每个节点有三个平动自由度，无转动自由度。由于弹性地基板在竖向荷载作用下发生弯曲变形，故采用非协调实体元提高计算精度；同时对比 50x50x1 和 100x100x1 两种网格密度对计算结果的影响。

有限元案例分析

如表 3 所示，随着网格密度的增加，SAP2000 计算结果逐步逼近理论解。

表 3 实体单元的计算结果

位移	基床系数	网格密度	SAP2000	理论值	误差
中心点挠度 u_z	4700	50x50x1	20.80	21.56	-3.5%
		100x100x1	21.49		-0.3%
	125000	50x50x1	3.70	4.18	-11.5%
		100x100x1	4.13		-1.3%