

薄壁圆筒的三维有限元分析

1 模型信息

本例分别采用 SAP2000 中的薄壳单元和厚壳单元，计算薄壁圆筒在内压力作用下顶部的径向和纵向位移以及筒壁的环向正应力，同时对比不同网格密度对计算精度的影响。

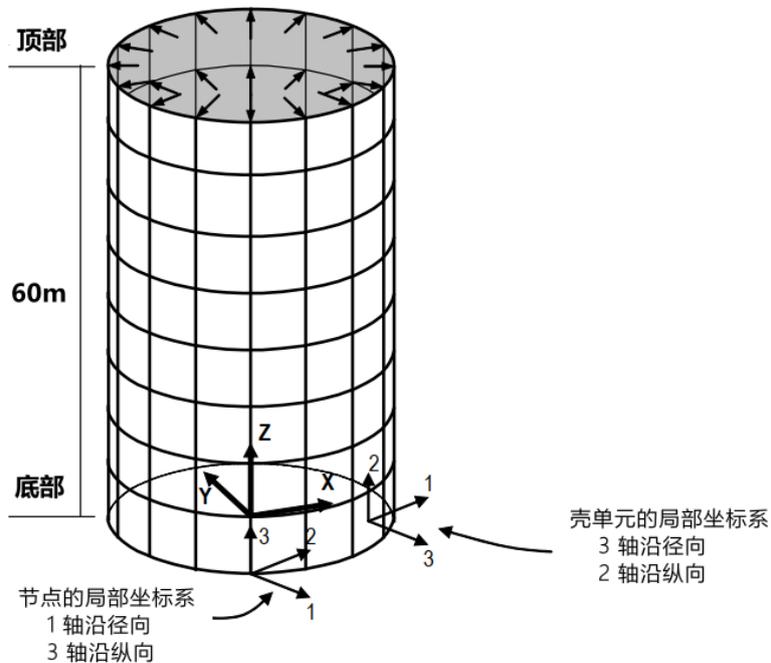


图 1 薄壁圆筒的三维有限元分析

1.1 几何尺寸

- 高度： $H=60\text{m}$
- 半径： $R=18\text{m}$
- 壁厚： $t=30\text{mm}$

1.2 材料属性

- 弹性模量： $E = 200\text{GPa}$
- 泊松比： $\nu = 0.3$

1.3 边界条件

底部节点约束竖向和环向的平动自由度，其余节点仅约束环向的平动自由度。

1.4 施加荷载

圆筒内表面的均布面荷载： $q=7\text{kN/m}^2$

2 理论计算

根据弹性力学中柱壳的极坐标解答，计算薄壁圆筒在内压力作用下顶部的径向和纵向位移以及筒壁的环向正应力。具体如下：

- 筒顶的径向位移

$$u_r = \frac{qR^2}{Et} = 0.378\text{mm}$$

- 筒顶的纵向位移

$$u_z = \frac{\nu qRz}{Et} (z = H) = \frac{\nu qRH}{Et} = 0.378\text{mm}$$

- 筒壁环向正应力

$$\sigma_\theta = \frac{qR}{t} = 4.2\text{MPa}$$

3 SAP2000 各类单元的计算结果分析及其与理论解的对比

为了便于约束节点的环向平动自由度，用户应修改全部节点的局部轴，保证局部 1 轴沿圆筒的径向，局部 3 轴圆筒的纵向，如图 1 所示。此外，如果采用图 1 所示的壳单元局部轴，筒壁的环向正应力对应 SAP2000 输出的壳单元应力分量 S11。

本例对比 8x16 和 24x48 两种网格密度对计算精度的影响，8 和 24 为圆筒的纵向单元数量，16 和 48 为圆筒的环向单元数量。

注意，网格密度 24x48 并非 8x16 直接加密三倍，用户需要在利用旋转拉伸或柱面轴网绘制几何模型时增加环向的单元数量。前者无法提高计算精度，甚至会降低计算精度；后者才能提高正多边形和圆形的拟合精度和计算精度。

3.1 薄壳单元

薄壳单元由薄板单元和膜单元组合而成，包括三节点三角形单元和四节点四边形单元，每个节点有三个平动自由度和三个转动自由度。

如表 1 所示，随着网格密度的增加，SAP2000 计算结果逐步逼近解析解。

表 1 薄壳单元分析结果

位移或应力	网格密度	SAP2000	理论值	误差
筒顶 径向位移	8 x 16	0.371	0.378	-1.9%
	24 x 48	0.377		-0.2%
筒顶 纵向位移	8 x 16	0.371	0.378	-1.9%
	24 x 48	0.377		-0.2%
筒壁 环向正应力	8 x 16	4.1	4.2	-1.9%
	24 x 48	4.2		-0.2%

3.2 厚壳单元

SAP2000 厚壳单元的主要力学性能于薄壳单元相同，但可以更准确地考虑横向剪切变形对计算结果的影响。

如表 2 所示，随着网格密度的增加，SAP2000 计算结果逐步逼近解析解。

表 2 厚壳单元分析结果

位移或应力	网格密度	SAP2000	理论值	误差
筒顶 径向位移	8 x 16	0.371	0.378	-1.9%
	24 x 48	0.377		-0.2%
筒顶 纵向位移	8 x 16	0.371	0.378	-1.9%
	24 x 48	0.377		-0.2%
筒壁 环向正应力	8 x 16	4.1	4.2	-1.9%
	24 x 48	4.2		-0.2%

3.3 误差分析

SAP2000 有限元分析的计算误差来源于圆筒横断面的正多边形与圆形的几何误差。如图 2 所示，壳单元实际位置的中心点与圆筒中心点的距离 $a=R\cos(\theta/2)$ 。

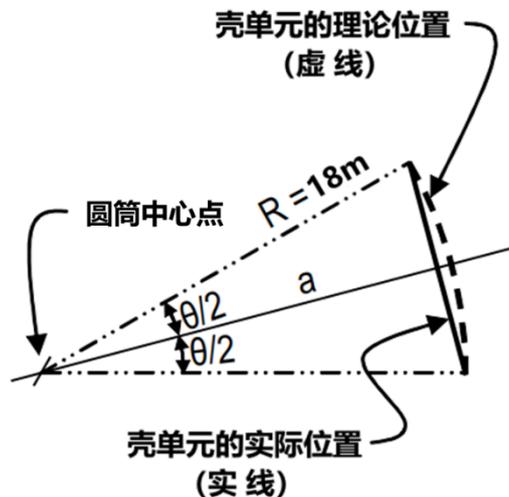


图 2 单个壳单元的横断面示意图

如表 3 所示，不同网格密度的 a 值与理论值 R 的几何误差，也就是表 1 和表 2 中“SAP2000 vs 理论值”的误差。

表 3 不同网格密度的几何误差

网格密度	圆心角 θ	距离 a	理论值 R	误差
8 x 16	22.5°	17.654	18	-1.9%
24 x 48	7.5°	17.961	18	-0.2%