

悬臂扭曲梁的有限元分析

1 模型信息

本例分别采用 SAP2000 中的薄壳单元、厚壳单元和实体单元，计算悬臂扭曲梁在自由端集中荷载作用下的梁端挠度。如图 1 所示，悬臂扭曲梁从固定端到自由端的扭曲角度为 90° 。

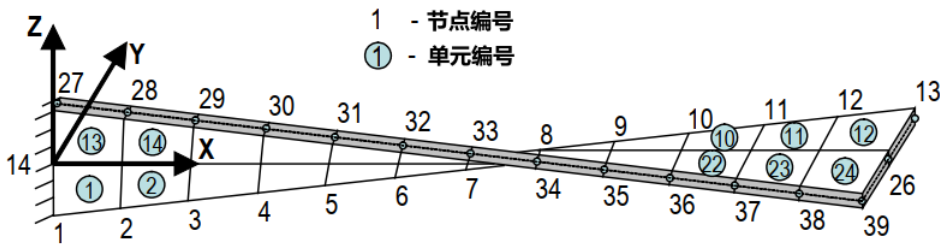


图 1 悬臂扭曲梁示意图

1.1 几何尺寸

- 构件长度： $L = 300\text{mm}$
- 截面高度： $h = 30\text{mm}$
- 截面宽度： $b = 10\text{mm}$

1.2 材料属性

- 泊松比： $\nu = 0.25$
- 弹性模量： $E = 200\text{GPa}$
- 剪切模量： $G = E / 2(1 + \nu) = 200 / (2 \times (1 + 0.25)) = 80\text{GPa}$

1.3 截面常数

- 截面面积： $A = bh = 300\text{mm}^2$
- 关于强轴的截面惯性矩： $I_{33} = bh^3 / 12 = 10 \times 30^3 / 12 = 22500\text{mm}^4$
- 关于弱轴的截面惯性矩： $I_{22} = b^3h / 12 = 10^3 \times 30 / 12 = 2500\text{mm}^4$
- 剪切面积： $A_s = 5A / 6 = 5 \times 10 \times 30 / 6 = 250\text{mm}^2$

1.4 自由端集中荷载

如图 1 所示，壳元模型的自由端存在三个节点，中间节点#26 施加 50N 集中力，其余两个节点#13 和#39 各施加 25N 集中力，三者保持 1:2:1 比例关系。

- 平面内（Y 向）： $F_y = 100\text{N}$
- 平面外（Z 向）： $F_z = 100\text{N}$

2 理论计算

基于铁木辛柯梁理论考虑剪切变形引起的附加挠度，利用结构力学中的单位荷载法计算悬臂扭曲梁的弯曲变形和剪切变形引起的自由端挠度。以平面内（Y 向）的自由端集中荷载 F_y 为例，具体计算过程如下：

- 以悬臂梁固定端为坐标原点的截面扭曲角

$$\theta = \frac{x}{300} \frac{\pi}{2}$$

- 沿 Y 轴的截面剪力

$$V_y = F_y$$

- 绕 Z 轴的截面弯矩

$$M_z = F_y (300 - x)$$

- 绕强轴的截面弯矩

$$M_{33} = M_z \sin \theta$$

- 绕弱轴的截面弯矩

$$M_{22} = M_z \cos \theta$$

- 自由端水平位移

$$\begin{aligned} U_y &= \int_0^L \frac{\bar{M}_{33} M_{33}}{EI_{33}} dx + \int_0^L \frac{\bar{M}_{22} M_{22}}{EI_{22}} dx + \int_0^L \frac{\bar{V}_y V_y}{GA_s} dx \\ &= \frac{(\pi^2 - 6) F_y L^3}{6\pi^2 EI_{33}} + \frac{(\pi^2 + 6) F_y L^3}{6\pi^2 EI_{22}} + \frac{F_y L}{GA_s} = 1.488 \text{mm} \end{aligned}$$

同理，平面外（Z 向）的自由端集中荷载 F_z 产生的竖向位移为：

$$U_z = \frac{(\pi^2 + 6) F_z L^3}{6\pi^2 EI_{33}} + \frac{(\pi^2 - 6) F_z L^3}{6\pi^2 EI_{22}} + \frac{F_z L}{GA_s} = 0.515 \text{mm}$$

3 SAP2000 各类单元的计算结果分析及其与理论解的对比

3.1 薄壳单元

SAP2000 薄壳单元由薄板单元和膜单元组合而成，包括三节点三角形单元和四节点四边形单元，每个节点有三个平动自由度和三个转动自由度。薄壳单元的理论基础有别于铁木辛柯梁理论，不存在平截面假定，还可以计算横向正应力。因此，薄壳单元的计算结果与理论值会存在微小的误差，如表 1 所示。

注意，从 SAP2000 中提取的位移值为自由端 3 个节点的平均值。用户可以在 Excel 表格中统计平均值，也可以在 SAP2000 中定义广义位移直接输出平均值。



有限元案例分析

表 1 薄壳单元分析结果

网格密度	集中荷载	位移分量	SAP2000	理论值	误差
12 x 2	$F_y = 100N$	U_y	1.481	1.488	-0.5%
	$F_z = 100N$	U_z	0.520	0.515	1.0%

3.2 厚壳单元

SAP2000 厚壳单元的主要力学性能与薄壳单元相同，但可以更准确地考虑横向剪切变形对计算结果的影响。同理，厚壳单元的计算结果与理论值也会存在微小的误差，如表 2 所示。

注意，从 SAP2000 中提取的位移值为自由端 3 个节点的平均值。用户可以在 Excel 表格中统计平均值，也可以在 SAP2000 中定义广义位移直接输出平均值。

表 2 厚壳单元分析结果

网格密度	集中荷载	位移分量	SAP2000	理论值	误差
12 x 2	$F_y = 100N$	U_y	1.477	1.488	-0.8%
	$F_z = 100N$	U_z	0.518	0.515	0.6%

3.3 实体单元 (非协调元)

实体单元属于空间连续体单元，每个节点有三个平动自由度，无转动自由度。本例中的悬臂梁实体模型沿厚度方向布置两层单元，整体网格密度为 12x2x2。悬臂梁自由端共 9 个节点，每个节点施加 $100/9=11.11N$ 集中力，不再考虑按各个节点的从属面积分配总荷载。

实体单元的理论基础也有别于铁木辛柯梁理论，计算结果与理论值会存在微小的误差，如表 3 所示。注意，从 SAP2000 中提取的位移值为自由端 9 个节点的平均值。用户可以在 Excel 表格中统计平均值，也可以在 SAP2000 中定义广义位移直接输出平均值。

表 3 实体单元分析结果

网格密度	集中荷载	位移分量	SAP2000	理论值	误差
12 x 2 x 2	$F_y = 100N$	U_y	1.478	1.488	-0.7%
	$F_z = 100N$	U_z	0.502	0.515	-2.5%