

厚壁圆筒的有限元分析

1 模型信息

本例分别采用 SAP2000 中的平面应变单元、平面应力单元和轴对称单元，计算厚壁圆筒在内压力作用下内表面的径向位移和三个正应力分量。除单元类型外，本例也会对比网格密度和泊松比对计算结果的影响。

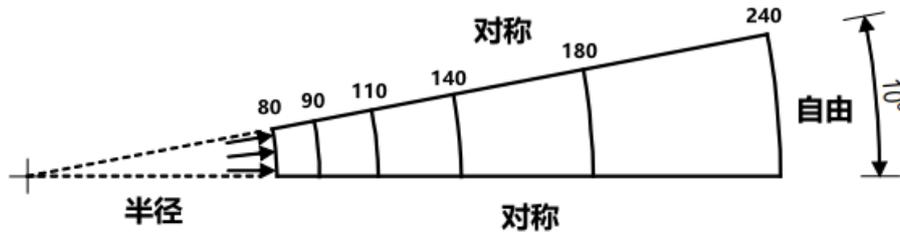


图 1 厚壁圆筒 1/36 (10°) 示意图

1.1 几何尺寸

- 厚度: $t = 20\text{mm}$
- 内径: $R_i = 80\text{mm}$
- 外径: $R_o = 240\text{mm}$

1.2 材料属性

- 泊松比: $\nu = 0.3, 0.49, 0.499, 0.4999$
- 弹性模量: $E = 7\text{GPa}$

1.3 边界条件

厚壁圆筒的几何形状、边界条件和荷载分布均具有轴对称性，故可取 1/36 (10°) 圆环进行理论计算和有限元分析。如图 1 所示，计算模型中的节点边界条件包括：

- 对称边界：约束沿环向的平动自由度
- 自由边界：无约束

注意，为了准确定义上述对称边界条件，SAP2000 中的节点局部轴应采用极坐标系。

1.4 施加荷载

圆筒内表面的均布面荷载: $q = 7\text{N/mm}^2$

2 理论计算

根据弹性力学的平面问题极坐标解答，计算厚壁圆筒在内压力作用下的径向位移和三个正应力分量。具体如下：

- 由边界条件计算积分常数

$$A = -\frac{R_o^2 R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} q, \quad 2C = \frac{q R_i^2}{R_o^2 - R_i^2}$$

- 径向位移（平面应变问题）

$$u_r = \frac{1-\mu^2}{E} \left[-\left(1 + \frac{\mu}{1-\mu}\right) \frac{A}{r} + 2\left(1 - \frac{\mu}{1-\mu}\right) Cr \right]$$

- 径向位移（平面应力问题）

$$u_r = \frac{1}{E} \left[-(1+\mu) \frac{A}{r} + 2(1-\mu) Cr \right]$$

- 径向正应力

$$\sigma_r = -\frac{\frac{R_o^2}{r^2} - 1}{\frac{R_o^2}{R_i^2} - 1} q$$

- 环向正应力

$$\sigma_\theta = \frac{\frac{R_o^2}{r^2} + 1}{\frac{R_o^2}{R_i^2} - 1} q$$

- 纵向正应力（仅限平面应变问题）

$$\sigma_l = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) = \frac{2}{\frac{R_o^2}{R_i^2} - 1} q$$

在以上各式中取 $r=R_i$ 可得厚壁圆筒内表面的位移和应力值，如表 1 所示。注意，为了便于输出和对比平面单元的正应力分量，SAP2000 中平面单元的局部轴应采用极坐标系，即旋转角度为 $10/2=5^\circ$ 。

表 1 不同泊松比对应的位移和应力（理论计算）

问题类型	泊松比	径向位移	径向正应力	环向正应力	纵向正应力
平面应变	0.3	0.1222	-7	8.75	0.53
	0.49	0.1344	-7	8.75	0.86
	0.499	0.1349	-7	8.75	0.87
	0.499	0.1350	-7	8.75	0.87
平面应力	0.3	0.1240	-7	8.75	-
	0.49	0.1392	-7	8.75	-
	0.499	0.1399	-7	8.75	-
	0.499	0.1400	-7	8.75	-



3 SAP2000 各类单元的计算结果分析及其与理论解的对比

3.1 平面应变单元

SAP2000 平面应变单元属于连续体单元，包括三节点三角形单元和四节点四边形单元，每个节点有两个平动自由度，无转动自由度。由于在内压力作用下，厚壁圆筒存在弯曲变形，本例采用非协调元提高计算精度。

如表 2 所示，通常随着网格密度的增加，SAP2000 计算结果逐步逼近解析解。

表 2 平面应变单元分析结果

位移和应力	泊松比	网格密度	SAP2000	理论值	误差
径向位移	0.3	5 x 1 x 1	0.1210	0.1222	-1%
	0.49	5 x 1 x 1	0.1324	0.1344	-1%
	0.499	5 x 1 x 1	0.1329	0.1349	-1%
	0.4999	5 x 1 x 1	0.1330	0.1350	-1%
	0.49	20 x 1 x 1	0.1343	0.1344	0%
	0.49	160 x 1 x 1	0.1344		0%
径向正应力	0.3	5 x 1 x 1	-6.11	-7.00	-13%
	0.49	5 x 1 x 1	-6.10		-13%
	0.499	5 x 1 x 1	-6.10		-13%
	0.4999	5 x 1 x 1	-6.10		-13%
	0.49	20 x 1 x 1	-6.76		-3%
	0.49	160 x 1 x 1	-6.97		0%
环向正应力	0.3	5 x 1 x 1	8.96	8.75	2%
	0.49	5 x 1 x 1	9.32		7%
	0.499	5 x 1 x 1	9.34		7%
	0.4999	5 x 1 x 1	9.35		7%
	0.49	20 x 1 x 1	8.96		2%
	0.49	160 x 1 x 1	8.78		0%
纵向正应力	0.3	5 x 1 x 1	0.86	0.53	62%
	0.49	5 x 1 x 1	1.58	0.86	83%
	0.499	5 x 1 x 1	1.62	0.87	86%
	0.4999	5 x 1 x 1	1.62	0.87	86%
	0.49	20 x 1 x 1	1.08	0.86	25%
	0.49	160 x 1 x 1	0.89		3%

3.2 平面应力单元

SAP2000 平面应力单元属于连续体单元，包括三节点三角形单元和四节点四边形单元，每个节点有两个平动自由度，无转动自由度。由于在内压力作用下，厚壁圆筒存在弯曲变形，本例采用非协调元提高计算精度。

如表 3 所示，通常随着网格密度的增加，SAP2000 计算结果逐步逼近解析解。注意，平面应力单元的面外正应力为零（即表 1 中的纵向正应力），故表 3 未对比该应力分量。

表 3 平面应力单元分析结果

位移和应力	泊松比	网格密度	SAP2000	理论值	误差
径向位移	0.3	5 x 1 x 1	0.1229	0.1222	-1%
	0.49	5 x 1 x 1	0.1377	0.1344	-1%
	0.499	5 x 1 x 1	0.1384	0.1349	-1%
	0.4999	5 x 1 x 1	0.1385	0.1350	-1%
	0.49	20 x 1 x 1	0.1391	0.1344	0%
	0.49	160 x 1 x 1	0.1392		0%
径向正应力	0.3	5 x 1 x 1	-6.11	-7.00	-13%
	0.49	5 x 1 x 1	-6.11		-13%
	0.499	5 x 1 x 1	-6.11		-13%
	0.4999	5 x 1 x 1	-6.11		-13%
	0.49	20 x 1 x 1	-6.76		-3%
	0.49	160 x 1 x 1	-6.97		0%
环向正应力	0.3	5 x 1 x 1	8.87	8.75	1%
	0.49	5 x 1 x 1	9.01		3%
	0.499	5 x 1 x 1	9.01		3%
	0.4999	5 x 1 x 1	9.01		3%
	0.49	20 x 1 x 1	8.86		1%
	0.49	160 x 1 x 1	8.77		0%

3.3 轴对称单元

SAP2000 轴对称属于连续体单元，包括三节点三角形单元和四节点四边形单元，每个节点有两个平动自由度，无转动自由度。轴对称单元以 Z 轴为对称轴，故用户应在 XZ 平面或 XY 平面内建模。由于在内压力作用下，厚壁圆筒存在弯曲变形，本例采用非协调元提高计算精度。

注意，平面问题的研究对象是厚壁圆筒的横断面，轴对称问题的研究对象是厚壁圆筒的纵断面。如果约束两端横断面的纵向位移，轴对称问题等效于前述平面应变问题；如果不约束，则等效于平面应力问题；本例对比平面应变问题的解析解。

如表 4 所示，通常随着网格密度的增加，SAP2000 计算结果逐步逼近解析解。

有限元案例分析

表 4 轴对称单元分析结果

位移和应力	泊松比	网格密度	SAP2000	理论值	误差
径向位移	0.3	5 x 1 x 1	0.1210	0.1222	-1%
	0.49	5 x 1 x 1	0.1324	0.1344	-1%
	0.499	5 x 1 x 1	0.1329	0.1349	-1%
	0.4999	5 x 1 x 1	0.1330	0.1350	-1%
	0.49	20 x 1 x 1	0.1343	0.1344	0%
	0.49	160 x 1 x 1	0.1344		0%
径向正应力	0.3	5 x 1 x 1	-6.11	-7.00	-13%
	0.49	5 x 1 x 1	-6.10		-13%
	0.499	5 x 1 x 1	-6.10		-13%
	0.4999	5 x 1 x 1	-6.10		-13%
	0.49	20 x 1 x 1	-6.76		-3%
	0.49	160 x 1 x 1	-6.97		0%
环向正应力	0.3	5 x 1 x 1	8.96	8.75	2%
	0.49	5 x 1 x 1	9.32		7%
	0.499	5 x 1 x 1	9.34		7%
	0.4999	5 x 1 x 1	9.35		7%
	0.49	20 x 1 x 1	8.96		2%
	0.49	160 x 1 x 1	8.78		0%
纵向正应力	0.3	5 x 1 x 1	0.86	0.53	62%
	0.49	5 x 1 x 1	1.58	0.86	83%
	0.499	5 x 1 x 1	1.62	0.87	86%
	0.4999	5 x 1 x 1	1.62	0.87	86%
	0.49	20 x 1 x 1	1.08	0.86	25%
	0.49	160 x 1 x 1	0.89		3%