

板弯曲的有限元分析

1 模型信息

本例分别采用 SAP2000 中的薄壳单元、厚壳单元和实体单元，计算由形状规则的单元组成的矩形板在法向均布面荷载和集中荷载作用下的中心点 Z 向挠度。除单元类型外，本例还会对比边界条件、网格密度以及长宽比对计算结果的影响。

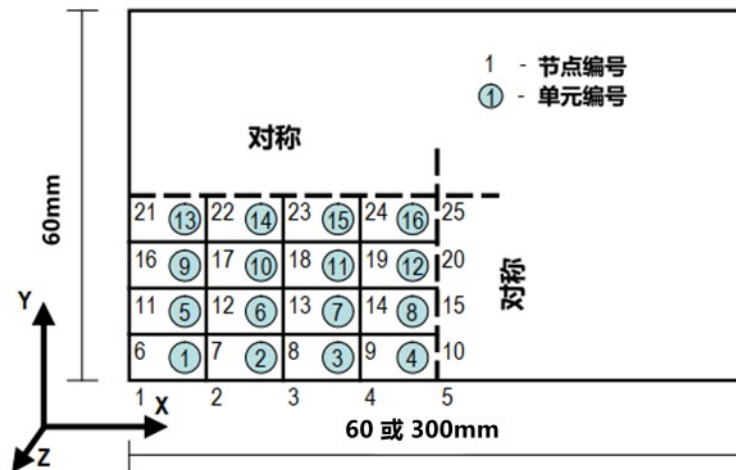


图 1 矩形板 1/4 的单元组成和节点坐标

1.1 几何尺寸

- 厚度: $t = 0.01mm$
- 宽度: $b = 60mm$
- 长度: $L = 60mm$ 或 $300mm$ ，对应的矩形板长宽比为 1 或 5。

1.2 材料属性

- 泊松比: $\nu = 0.3$
- 弹性模量: $E = 130GPa$
- 剪切模量: $G = E / 2(1 + \nu) = 130 / (2 \times (1 + 0.3)) = 50GPa$

1.3 边界条件

矩形板的几何形状、边界条件（四边固定或四边简支）和荷载分布均具有双轴对称性，故可取 1/4 矩形板做理论计算和有限元分析。如图 1 所示，计算模型中的节点边界条件包括：

- 约束绕 X 轴的转动自由度：#22~#24 节点；
- 约束绕 Y 轴的转动自由度：#10、#15、#20 节点；
- 约束绕 X 轴和 Y 轴的转动自由度：#25 节点；
- 约束全部自由度（四边固定）：#1~#6、#11、#16、#21 节点；
- 约束沿 X/Y/Z 轴的平动自由度（四边简支）：#1~#6、#11、#16、#21 节点。

1.4 施加荷载

- 均布面荷载: $q=0.7\text{N/m}^2$
- 中心点的集中荷载: $P=1.8\times 10^{-3}\text{N}$, 1/4 模型为 $0.45\times 10^{-3}\text{N}$ 。

2 理论计算

根据弹性力学的薄板弯曲小挠度理论, 计算薄板的抗弯刚度为:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = 11.9 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m}$$

2.1 四边固定

参考《板壳理论》(铁摩辛柯&沃诺斯基 著) 表 35 和表 37, 计算矩形板中心点处的最大挠度值。具体如下:

2.1.1 长宽比=1

- 均布面荷载作用下的中心点挠度
$$U_z = 0.00126qb^4 / D = 0.96\text{mm}$$
- 集中荷载作用下的中心点挠度
$$U_z = 0.00560Pb^2 / D = 3.05\text{mm}$$

2.1.2 长宽比=5

- 均布面荷载作用下的中心点挠度
$$U_z = 0.00260qb^4 / D = 1.98\text{mm}$$
- 集中荷载作用下的中心点挠度
$$U_z = 0.00725Pb^2 / D = 3.95\text{mm}$$

2.2 四边简支

参考《板壳理论》(铁摩辛柯&沃诺斯基 著) 表 8 和表 23, 计算矩形板中心点处的最大挠度值。具体如下:

2.2.1 长宽比为 1

- 均布面荷载作用下的中心点挠度
$$U_z = 0.00406qb^4 / D = 3.09\text{mm}$$
- 集中荷载作用下的中心点挠度
$$U_z = 0.01160Pb^2 / D = 6.31\text{mm}$$

2.2.2 长宽比为 5

- 均布面荷载作用下的中心点挠度
$$U_z = 0.01297qb^4 / D = 9.88\text{mm}$$
- 集中荷载作用下的中心点挠度



$$U_z = 0.01695Pb^2 / D = 9.23mm$$

3 SAP2000 各类单元的计算结果分析及其与理论解的对比

3.1 薄壳单元

SAP2000 薄壳单元包括三节点三角形单元和四节点四边形单元，每个节点有三个平动自由度和三个转动自由度。薄壳单元由薄板单元和膜单元组合而成，本例仅涉及薄板单元的面外变形。

3.1.1 四边固定

如表 1 所示，通常随着网格密度的增加，SAP2000 计算结果逐步逼近解析解。

表 1 薄壳单元分析结果（四边固定）

| 矩形板 | 荷载类型 | 网格密度 | SAP2000 | 理论值 | 误差 |
|-------|-------|--------|---------|------|----|
| 长宽比=1 | 均布面荷载 | 4 x 4 | 1.01 | 0.96 | 5% |
| | | 8 x 8 | 0.97 | | 2% |
| | 集中荷载 | 4 x 4 | 3.21 | 3.05 | 5% |
| | | 8 x 8 | 3.10 | | 2% |
| 长宽比=5 | 均布面荷载 | 8 x 4 | 1.98 | 1.98 | 0% |
| | | 32 x 8 | 1.98 | | 0% |
| | 集中荷载 | 8 x 4 | 4.22 | 3.95 | 7% |
| | | 32 x 8 | 3.99 | | 1% |

3.1.2 四边简支

如表 2 所示，通常随着网格密度的增加，SAP2000 计算结果逐步逼近解析解。

表 2 薄壳单元分析结果（四边简支）

| 矩形板 | 荷载类型 | 网格密度 | SAP2000 | 理论值 | 误差 |
|-------|-------|--------|---------|------|-----|
| 长宽比=1 | 均布面荷载 | 4 x 4 | 3.09 | 3.09 | 0% |
| | | 8 x 8 | 3.10 | | 0% |
| | 集中荷载 | 4 x 4 | 6.50 | 6.31 | 3% |
| | | 8 x 8 | 6.37 | | 1% |
| 长宽比=5 | 均布面荷载 | 8 x 4 | 9.77 | 9.88 | -1% |
| | | 32 x 8 | 9.85 | | 0% |
| | 集中荷载 | 8 x 4 | 9.58 | 9.23 | 4% |
| | | 32 x 8 | 9.29 | | 1% |

3.2 厚壳单元

SAP2000 厚壳单元的主要力学性能于薄壳单元相同，但可以更准确地考虑横向剪切变形对计算结果的影响。

3.2.1 四边固定

如表 3 所示，通常随着网格密度的增加，SAP2000 计算结果逐步逼近解析解。

表 3 厚壳单元分析结果（四边固定）

| 矩形板 | 荷载类型 | 网格密度 | SAP2000 | 理论值 | 误差 |
|-------|-------|------------|---------|------|-----|
| 长宽比=1 | 均布面荷载 | 4 x 4 | 0.95 | 0.96 | -1% |
| | | 8 x 8 | 0.97 | | 1% |
| | 集中荷载 | 4 x 4 | 2.93 | 3.05 | -4% |
| | | 8 x 8 | 3.03 | | -1% |
| 长宽比=5 | 均布面荷载 | 8 x 4 | 1.97 | 1.98 | 0% |
| | | 32 x 8 | 1.98 | | 0% |
| | 集中荷载 | 8 x 4 | 3.62 | 3.95 | -8% |
| | | 32 x 8 | 3.91 | | -1% |
| | | 8 x 4 (渐变) | 3.76 | | -5% |

矩形板在集中荷载作用下，中心点附近存在应力集中。虽然整体加密网格为 32×8 可以有效提高计算精度，但也会显著增加计算量。如果在应力梯度较大的中心点处局部加密网格（如图 2 所示），在不增加单元和节点数量的前提下，可将计算精度从 8% 提高至 5%。

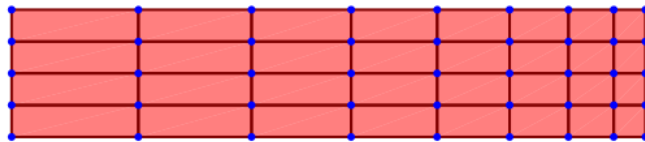


图 2 网格密度渐变的 1/4 矩形板

3.2.2 四边简支

如表 4 所示，通常随着网格密度的增加，SAP2000 计算结果逐步逼近解析解。

表 4 厚壳单元分析结果（四边简支）

| 矩形板 | 荷载类型 | 网格密度 | SAP2000 | 理论值 | 误差 |
|-------|-------|-------|---------|------|-----|
| 长宽比=1 | 均布面荷载 | 4 x 4 | 3.07 | 3.09 | -1% |
| | | 8 x 8 | 3.09 | | 0% |
| | 集中荷载 | 4 x 4 | 6.32 | 6.31 | 0% |
| | | 8 x 8 | 6.32 | | 0% |
| | | 8 x 4 | 9.77 | 9.88 | -1% |



有限元案例分析

| | | | | | |
|-------|-------|--------|------|------|-----|
| 长宽比=5 | 均布面荷载 | 32 x 8 | 9.85 | 9.23 | 0% |
| | 集中荷载 | 8 x 4 | 9.08 | | -2% |
| | | 32 x 8 | 9.22 | 0% | |

3.3 实体单元 (非协调元)

实体单元属于空间连续体单元，每个节点有三个平动自由度，无转动自由度。注意，宽厚比过大的畸形实体单元会影响数值计算的稳定性，故此处修改实体单元的厚度为 1mm，前述理论计算的挠度值将缩小 6 个数量级。此外，实体单元的边界条件应修改为：

- 约束沿 Y 轴的平动自由度：#22~#24 节点；
- 约束沿 X 轴的平动自由度：#10、#15、#20 节点；
- 约束沿 X 轴和 Y 轴的平动自由度：#25 节点；
- 约束全部自由度（四边固定）：#1~#6、#11、#16、#21 节点；
- 约束沿 Z 轴的平动自由度（四边简支）：#1~#6、#11、#16、#21 节点。

3.3.1 四边固定

如表 5 所示，随着网格密度的增加，SAP2000 计算结果逐步逼近解析解。

表 5 实体单元分析结果（四边固定）

| 矩形板 | 荷载类型 | 网格密度 | SAP2000 | 理论值 | 误差 |
|-------|-------|-------------|-----------------------|-----------------------|------|
| 长宽比=1 | 均布面荷载 | 4 x 4 x 1 | 7.70×10^{-7} | 0.96×10^{-6} | -20% |
| | | 8 x 8 x 1 | 9.51×10^{-7} | | -1% |
| | | 16 x 16 x 1 | 9.67×10^{-7} | | 1% |
| | 集中荷载 | 4 x 4 x 1 | 2.32×10^{-6} | 3.05×10^{-6} | -24% |
| | | 8 x 8 x 1 | 2.98×10^{-6} | | -2% |
| | | 16 x 16 x 1 | 3.07×10^{-6} | | 1% |
| 长宽比=5 | 均布面荷载 | 4 x 4 x 1 | 1.68×10^{-6} | 1.98×10^{-6} | -15% |
| | | 16 x 8 x 1 | 1.96×10^{-6} | | -1% |
| | | 32 x 16 x 1 | 1.98×10^{-6} | | 0% |
| | 集中荷载 | 4 x 4 x 1 | 1.35×10^{-6} | 3.95×10^{-6} | -66% |
| | | 16 x 8 x 1 | 3.62×10^{-6} | | -8% |
| | | 32 x 16 x 1 | 3.92×10^{-6} | | -1% |

3.3.2 四边简支

如表 6 所示，随着网格密度的增加，SAP2000 计算结果逐步逼近解析解。

有限元案例分析

表 6 实体单元分析结果（四边简支）

| 矩形板 | 荷载类型 | 网格密度 | SAP2000 | 理论值 | 误差 |
|-------|-------|-------------|-----------------------|-----------------------|------|
| 长宽比=1 | 均布面荷载 | 4 x 4 x 1 | 2.74×10^{-6} | 3.09×10^{-6} | -11% |
| | | 8 x 8 x 1 | 3.08×10^{-6} | | 0% |
| | | 16 x 16 x 1 | 3.12×10^{-6} | | 1% |
| | 集中荷载 | 4 x 4 x 1 | 5.49×10^{-6} | 6.31×10^{-6} | -13% |
| | | 8 x 8 x 1 | 6.27×10^{-6} | | -1% |
| | | 16 x 16 x 1 | 6.36×10^{-6} | | 1% |
| 长宽比=5 | 均布面荷载 | 4 x 4 x 1 | 8.53×10^{-6} | 9.88×10^{-6} | -14% |
| | | 16 x 8 x 1 | 9.83×10^{-6} | | -1% |
| | | 32 x 16 x 1 | 9.88×10^{-6} | | 0% |
| | 集中荷载 | 4 x 4 x 1 | 4.70×10^{-6} | 9.23×10^{-6} | -49% |
| | | 16 x 8 x 1 | 8.89×10^{-6} | | -4% |
| | | 32 x 16 x 1 | 9.22×10^{-6} | | 0% |



重庆大学
筑信达

