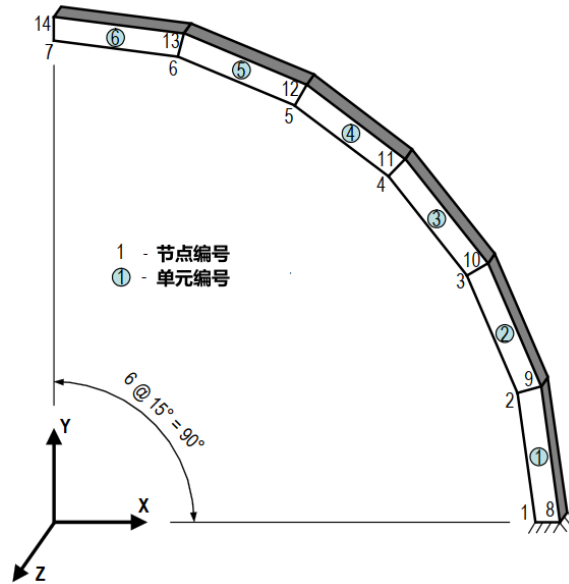


## 悬臂曲梁的有限元分析

## 1 模型信息



## 1.1 几何尺寸

- 外半径:  $R_o = 110\text{mm}$
- 内半径:  $R_i = 105\text{mm}$
- 中心线半径:  $R = 107.5\text{mm}$
- 中心线长度:  $L = 169\text{mm}$ ,  $90^\circ$ ,  $1/4$  圆
- 单元数量: 六等分 → 加密
- 截面高度:  $h = 5\text{mm}$
- 截面厚度:  $b = 2.5\text{mm}$

## 1.2 材料属性

- 泊松比:  $\mu = 0.25$
- 弹性模量:  $E = 70\text{GPa}$
- 剪切模量:  $G = E / 2(1 + \mu) = 70 / (2 \times (1 + 0.25)) = 28\text{GPa}$

## 1.3 截面常数

- 截面面积:  $A = bh = 12.5\text{mm}^2$
- 截面惯性矩:  $I = bh^3 / 12 = 2.5 \times 5^3 / 12 = 26.04\text{mm}^4$
- 剪切面积:  $A_s = 5A / 6 = 12.5 \times 5 / 6 = 10.42\text{mm}^2$

## 1.4 自由端荷载

- 竖向力:  $F_y = 1\text{kN}$

## 2 理论计算

基于铁木辛柯梁理论，考虑剪切变形引起的附加挠度，利用结构力学中的单位荷载法同时考虑悬臂曲梁的弯曲变形、剪切变形和轴向变形，自由端的竖向位移  $U_y$  为：

$$ds = R d\theta, \quad M_p(\theta) = F_y R \cos \theta, \quad F_{SP}(\theta) = F_y \cos \theta, \quad F_{NP}(\theta) = F_y \sin \theta$$

$$U_y = \int_0^L \frac{\bar{M} M_p}{EI} ds + \int_0^L \frac{\bar{F}_s F_{SP}}{GA_s} ds + \int_0^L \frac{\bar{F}_N F_{NP}}{EA} ds = \frac{\pi R^3 F_y}{4EI} + \frac{\pi R F_y}{4GA_s} + \frac{\pi R F_y}{4EA} = 535.4 \text{mm}$$

## 3 SAP2000 各类单元的计算结果分析及其与理论解的对比

### 3.1 平面梁单元

SAP2000 框架单元适用于三维空间的梁、柱、支撑等杆件，约束面外自由度后可简化为平面梁单元。平面梁单元由两个节点组成，每个节点有三个自由度，包括两个平动自由度和一个转动自由度。

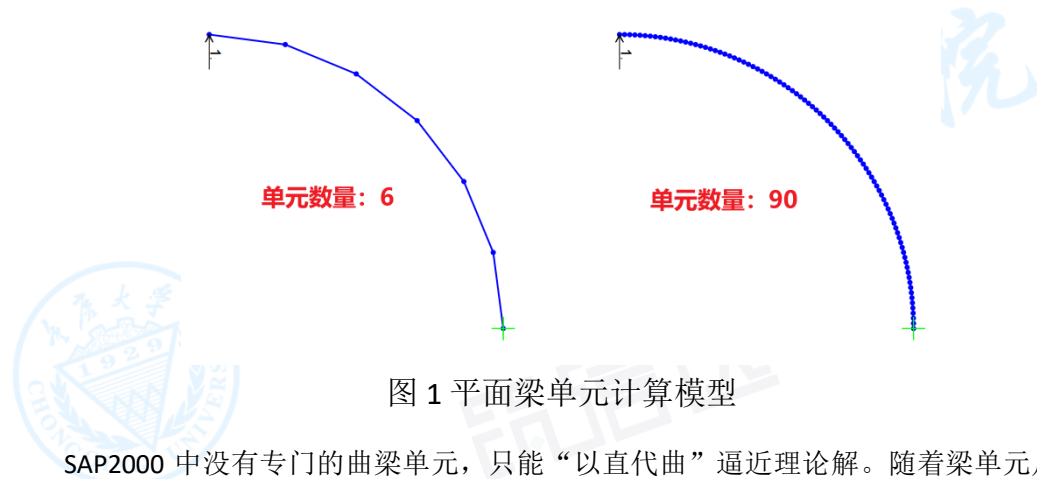


图 1 平面梁单元计算模型

SAP2000 中没有专门的曲梁单元，只能“以直代曲”逼近理论解。随着梁单元尺寸的减小和单元数量的增加，计算误差逐渐减小为零，如表 1 所示。

表 1 平面梁单元分析结果

单元数量	SAP2000	理论值	误差
6	528.0	535.4	-1.4%
90	535.6	535.4	0.0%

### 3.2 平面应力单元 (非协调元)

本例中的悬臂梁未受到面外荷载作用，仅产生面内变形和面内应力，故可视为平面应力问题。SAP2000 平面应力单元属于连续体单元，包括三节点三角形单元和四节点四边形单元，每个节点有两个平动自由度，无转动自由度。

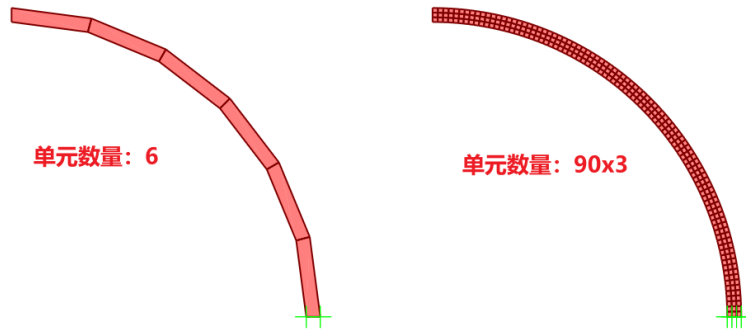


图 2 平面应力单元计算模型

非协调元通过在单元形函数中增加二次项，在不影响单元节点位移的情况下，改变单元内部的位移模式，提高了单元内部场函数的连续性和光滑性，可以有效避免“剪切锁死”。随着单元尺寸的减小和单元数量的增加，计算误差逐渐减小，逼近理论解，如表 2 所示。

表 2 平面应力单元分析结果

单元数量	SAP2000	理论值	误差
6	467.2	535.4	-12.7%
90x3	535.1	535.4	-0.1%

### 3.3 薄壳单元

薄壳单元由薄板单元和膜单元组合而成，其理论基础有别于铁木辛柯梁理论，不存在平截面假定，但可以计算横向正应力。SAP2000 薄壳单元包括三节点三角形单元和四节点四边形单元，每个节点有三个平动自由度和三个转动自由度。

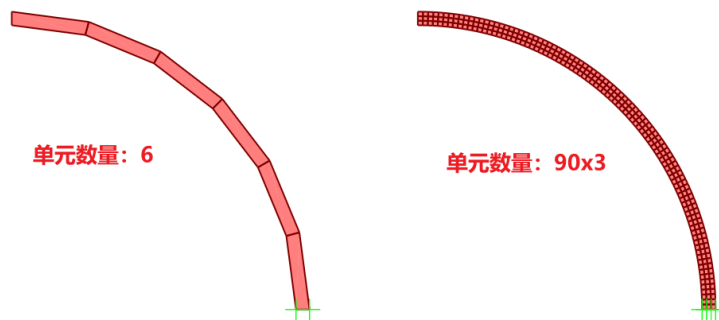


图 3 薄壳单元计算模型

薄壳单元的计算结果与理论值会存在误差，但随着单元尺寸的减小和单元数量的增加，计算误差逐渐减小，逼近理论解，如表 3 所示。

表 3 薄壳单元分析结果

单元数量	SAP2000	理论值	误差
6	465.5	535.4	-13.1%
90x3	534.2	535.4	-0.2%

### 3.4 实体单元 (非协调元)

实体单元属于空间连续体单元，以弹性力学为理论基础，单元节点有三个平动自由度，无转动自由度。

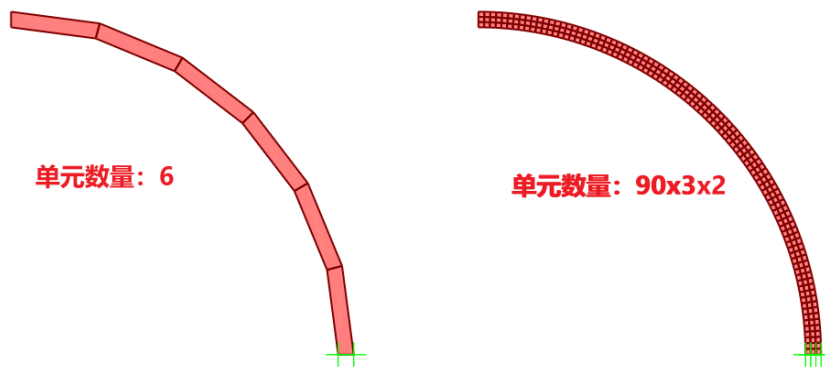


图 4 实体单元计算模型

实体单元的计算结果与理论值会存在误差，但随着单元单元的减小和单元数量的增加，计算误差逐渐减小，逼近理论解，如表 4 所示。

表 4 实体单元分析结果

单元数量	SAP2000	理论值	误差
6	463.0	535.4	-13.5%
90x3x2	534.7	535.4	-0.1%

