

## 悬臂直梁的有限元分析

### 1 模型信息

分别采用平面梁单元、平面应力单元、薄壳单元和实体单元对悬臂直梁进行受力分析。并与解析解对比，考察各类单元和网格的收敛性和计算效率。

#### 1.1 几何尺寸

- 构件长度:  $L = 6 \times 25\text{mm} = 150\text{mm}$
- 截面高度:  $h = 5\text{mm}$
- 截面宽度:  $b = 2.5\text{mm}$

#### 1.2 材料属性

- 泊松比:  $\mu = 0.3$
- 弹性模量:  $E = 70\text{GPa}$
- 剪切模量:  $G = E / 2(1 + \mu) = 70 / (2 \times (1 + 0.3)) = 26.92\text{GPa}$

#### 1.3 截面常数

- 截面面积:  $A = bh = 12.5\text{mm}^2$
- 截面惯性矩:  $I = bh^3 / 12 = 2.5 \times 5^3 / 12 = 26.04\text{mm}^4$
- 剪切面积:  $A_s = 5A / 6 = 12.5 \times 5 / 6 = 10.42\text{mm}^2$

#### 1.4 自由端荷载

- 轴向力:  $F_x = 1\text{kN}$
- 竖向力:  $F_z = 10\text{N}$
- 力偶矩:  $M_y = 1\text{kN} \cdot \text{mm}$

## 2 理论计算

基于铁木辛柯梁理论，考虑剪切变形引起的附加挠度，利用结构力学中的单位荷载法计算悬臂梁自由端的轴向位移和竖向位移。

### 2.1 轴向力

在轴向力 ( $F_x = 1\text{kN}$ ) 作用下，悬臂梁自由端的轴向位移  $U_x$  仅与轴向变形有关。具体如下：

$$U_x = \int_0^L \frac{\bar{F}_N F_{NP}}{EA} dx = \frac{F_x L}{EA} = 0.17\text{mm}$$

## 2.2 竖向力

在竖向力 ( $F_z = 10N$ ) 作用下, 悬臂梁自由端的竖向位移  $U_z$  与弯曲变形和剪切变形有关。具体如下:

$$U_z = \int_0^L \frac{\bar{M}M_P}{EI} dx + \int_0^L \frac{\bar{F}_s F_{SP}}{GA_s} dx = \frac{F_z L^3}{3EI} + \frac{F_z L}{GA_s} = 6.18mm$$

## 2.3 力偶矩

在力偶矩 ( $M_y = 1kN \cdot mm$ ) 作用下, 悬臂梁自由端的竖向位移  $U_z$  仅与弯曲变形有关。具体如下:

$$U_z = \int_0^L \frac{\bar{M}M_P}{EI} dx = \frac{M_y L^2}{2EI} = 6.17mm$$

## 3 SAP2000 各类单元的计算结果分析及其与理论解的对比

### 3.1 平面梁单元

SAP2000 框架单元适用于三维空间的梁、柱、支撑等杆件, 约束面外自由度后可简化为平面梁单元。平面梁单元由两个节点组成, 每个节点有三个自由度, 包括两个平动自由度和一个转动自由度。



图 1 平面梁单元计算模型

SAP2000 平面梁单元基于铁木辛柯梁理论, 与前述理论计算相同。如图 1 所示, 即使仅采用一个平面梁单元, SAP2000 计算结果也与理论值完全相同, 如表 1 所示。

表 1 平面梁单元分析结果

荷载	位移	SAP2000	理论值	误差
轴向力 $F_x$	$U_x$	0.17	0.17	0%
竖向力 $F_z$	$U_z$	6.18	6.18	0%
力偶矩 $M_y$	$U_z$	6.17	6.17	0%

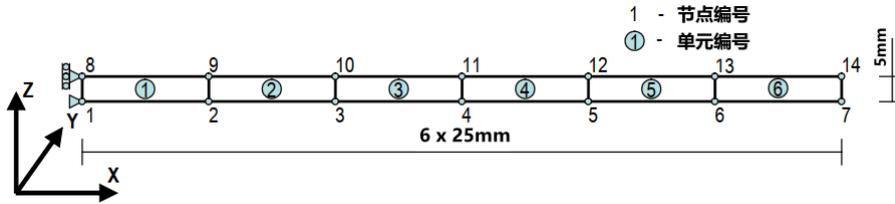
### 3.2 平面应力单元

本例中的悬臂梁未受到面外荷载作用, 仅产生面内变形和面内应力, 故可视为平面应力问题。SAP2000 平面应力单元属于连续体单元, 包括三节点三角形单元和四节点四边形单元, 每个节点有两个平动自由度, 无转动自由度。

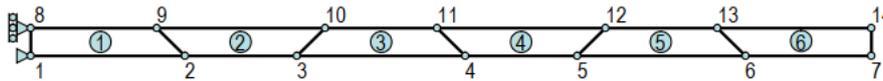
解析解是采用基本梁理论推导的, 该理论假设支座处无局部泊松效应。为此, SAP2000 中采用平面应力单元对梁建模时需与该假设匹配, 即激活  $U_x$  和  $U_z$  自由度, 约束其

# 有限元案例分析

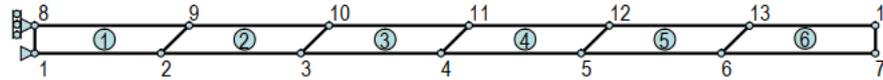
余自由度。并约束固定端结点 1 的  $U_x$  和  $U_z$  自由度以及结点 8 的  $U_x$  自由度，允许结点 8 在  $U_z$  方向发生位移，以避免产生局部泊松效应。同时，当梁在自由端承受面内剪切载荷时，将自由端荷载的一半反向施加到支座结点 8，从而避免产生局部泊松效应。



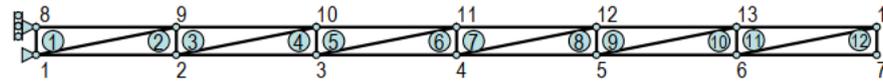
模型 A: 矩形单元



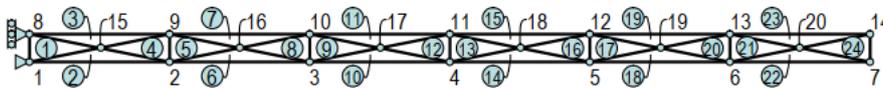
模型 B: 梯形单元



模型 C: 平行四边形单元



模型 D: 三角形单元



模型 E: 细化三角形单元

图 2 平面应力单元的网格划分

**采用平面应力协调元：**沿截面高度仅划分一层单元，各类线性平面应力单元的计算结果见表 2。由于线性单元（包括双线性四边形单元和常应变三角形单元）不允许发生弯曲变形，即单元会产生“剪切锁死”（shear lock）。因此，除轴向变形的计算精度可靠外，所有单元在弯矩和剪力作用下都无法保障计算精度。可以沿高度方向划分多层单元或进行网格细分以提高精度。

表 2 平面应力协调元分析结果

荷载	单元形状	位移	SAP2000	理论值	误差
轴向力 $F_x$	A 矩形	$U_x$	0.17	0.17	0%
	B 梯形		0.17		0%
	C 平行四边形		0.17		0%
	D 三角形		0.17		0%
	E 细化三角形		0.17		0%
竖向力 $F_z$	A 矩形	$U_z$	0.58	6.18	-91%
	B 梯形		0.17		-97%
	C 平行四边形		0.21		-97%
	D 三角形		0.20		-97%
	E 细化三角形		0.40		-94%
力偶矩 $M_y$	A 矩形	$U_z$	0.58	6.17	-91%
	B 梯形		0.14		-98%
	C 平行四边形		0.19		-97%
	D 三角形		0.19		-97%
	E 细化三角形		0.40		-94%

**采用平面应力非协调元：**沿截面高度仅布置一层非协调元，各类线性平面应力单元的计算结果见表 3。矩形单元的计算精度得到显著提高，平行四边形单元计算精度也有所提高，其余单元无变化。

非协调元通过在单元形函数中增加二次项，在不影响单元节点位移的情况下，改变单元内部的位移模式，提高了单元内部场函数的连续性和光滑性，可以有效避免“剪切锁死”。但这类单元通常在单元边界上存在位移不连续或重叠，故称为非协调单元。

实际应用时，非协调元往往能得到比协调元更好的精度和计算效率，通常推荐采用非协调元。



表 3 平面应力非协调元分析结果

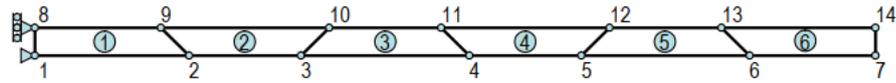
荷载	单元形状	位移	SAP2000	理论值	误差
轴向力 $F_x$	A 矩形	$U_x$	0.17	0.17	0%
	B 梯形		0.17		0%
	C 平行四边形		0.17		0%
	D 三角形		0.17		0%
	E 细化三角形		0.17		0%
竖向力 $F_z$	<b>A 矩形</b>	$U_z$	6.13	6.18	<b>-1%</b>
	B 梯形		0.32	-95%	
	<b>C 平行四边形</b>		3.91	<b>-37%</b>	
	D 三角形		0.20	-97%	
	E 细化三角形		0.40	-94%	
力偶矩 $M_y$	<b>A 矩形</b>	$U_z$	6.17	6.17	<b>0%</b>
	B 梯形		0.29		-95%
	<b>C 平行四边形</b>		4.48		<b>-27%</b>
	D 三角形		0.19		-97%
	E 细化三角形		0.40		-94%

### 3.3 薄壳单元

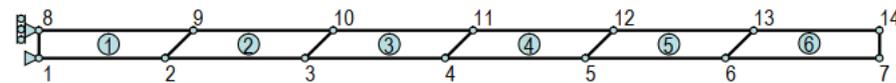
SAP2000 薄壳单元包括三节点三角形单元和四节点四边形单元，每个节点有三个平动自由度和三个转动自由度。



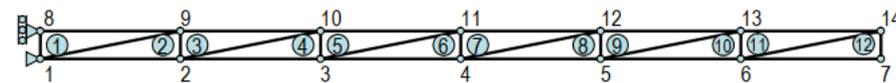
模型 A: 矩形单元



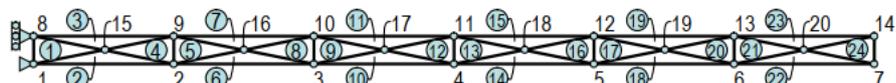
模型 B: 梯形单元



模型 C: 平行四边形单元



模型 D: 三角形单元



模型 E: 细化三角形单元

图 3 薄壳单元的网格划分

薄壳单元由薄板单元和膜单元组合而成，其理论基础有别于铁木辛柯梁理论，不存在平截面假定，但可以计算竖向正应力。因此，薄壳单元的计算结果与理论值会存在误差，不同单元形状和变形类型也会影响计算精度，详见表 4。

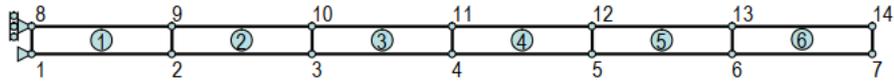
其中，悬臂梁的轴向变形对单元形状不敏感，但弯曲和剪切变形对单元形状非常敏感，矩形单元的误差基本为零，其余形状单元的误差过大。

表 4 薄壳单元分析结果

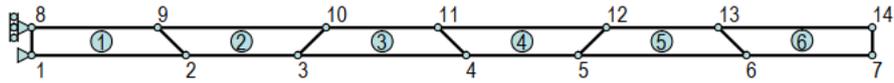
荷载	单元形状	位移	SAP2000	理论值	误差
轴向力 $F_x$	A 矩形	$U_x$	0.17	0.17	0%
	B 梯形		0.17		0%
	C 平行四边形		0.17		0%
	D 三角形		0.17		0%
	E 细化三角形		0.17		0%
竖向力 $F_z$	<b>A 矩形</b>	$U_z$	6.18	6.18	<b>0%</b>
	B 梯形		0.29	-95%	
	<b>C 平行四边形</b>		3.81	<b>-38%</b>	
	D 三角形		0.18	-97%	
	E 细化三角形		0.38	-94%	
力偶矩 $M_y$	<b>A 矩形</b>	$U_z$	6.16	6.17	<b>0%</b>
	B 梯形		0.26		-96%
	<b>C 平行四边形</b>		4.38		<b>-29%</b>
	D 三角形		0.18		-97%
	E 细化三角形		0.38		-94%

### 3.4 实体单元 (非协调元)

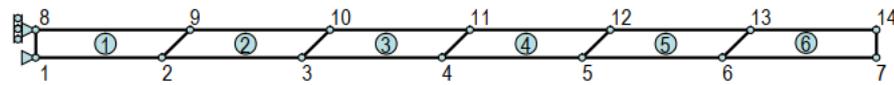
实体单元属于空间连续体单元，以弹性力学为理论基础，单元节点有三个平动自由度，无转动自由度。



模型 A: 矩形单元



模型 B: 梯形单元



模型 C: 平行四边形单元

图 4 实体单元的网格划分

网格密度: 长×宽×高 = 6×1×1

实体单元的计算结果与理论值会存在误差，不同单元形状和变形类型也会影响计算精度。对于**非协调实体元**的弯曲和剪切变形，形状规则的线性六面体单元的计算精度很高，但其余形状的线性单元精度很低。结果见表 5。

表 5 非协调实体单元分析结果

荷载	单元形状	位移	SAP2000	理论值	误差
轴向力 $F_x$	A 矩形	$U_x$	0.17	0.17	0%
	B 梯形		0.17		0%
	C 平行四边形		0.17		0%
竖向力 $F_z$	<b>A 矩形</b>	$U_z$	6.04	6.18	<b>-2.3%</b>
	B 梯形		0.29		-95%
	<b>C 平行四边形</b>		3.85		-38%
力偶矩 $M_y$	A 矩形	$U_z$	6.11	6.17	<b>-1.0%</b>
	B 梯形		0.27		-96%
	<b>C 平行四边形</b>		4.44		-28%



## 有限元案例分析

减小实体单元的尺寸、增加网格密度（长×宽×高 = 30×4×8），可以进一步提高计算精度，尤其对于不规则形状的实体单元，效果显著，如表 6 所示。

表 6 加密网格的非协调实体单元分析结果

荷载	单元形状	位移	SAP2000	理论值	误差
轴向力 $F_x$	A 矩形	$U_x$	0.17	0.17	0%
	B 梯形		0.17		0%
	C 平行四边形		0.17		0%
竖向力 $F_z$	A 矩形	$U_z$	6.13	6.18	-0.8%
	B 梯形		6.10		-1.3%
	C 平行四边形		6.13		-0.8%
力偶矩 $M_y$	A 矩形	$U_z$	6.14	6.17	-0.5%
	B 梯形		6.12		-0.8%
	C 平行四边形		6.14		-0.5%