

# 梁拱体系桥梁中吊杆力的计算

筑信达 吕良

吊杆是梁拱组合体系桥梁的重要组成部分，是将桥面荷载传递给系杆的媒介。吊杆力的合理与否直接关系到拱桥的受力和成桥后的内力分布，并影响桥梁今后正常使用状态乃至使用寿命。对于具有系梁和吊杆的拱桥来说，吊杆力有一定的调节空间，理论上讲，总可以找到一组吊杆力使得系杆拱桥在确定性荷载作用下的受力状态达到最优，这个过程就是所谓的吊杆力计算。

目前，确定吊杆索力的常用方法主要包括：刚性支承连续梁法、零位移法、刚性吊杆法、弯曲能量最小法、弯矩最小法以及影响矩阵法等<sup>[1]</sup>。本文将介绍拱桥吊索索力常用的几种计算方法，并通过案例来简要介绍这几种方法在 CsiBridge 中的实现及操作流程。

## 1 概述

### 1.1 常用方法介绍

#### (1) 刚性支承连续梁法

对于系梁吊杆类似弹性支承，在荷载作用下可以发生弹性或非弹性伸长，使系梁出现挠度变形，从而产生一定的内力。而刚性支承连续梁法就是在成桥状态下，将吊杆为系梁提供的竖向弹性支承视为竖向刚性支承，如图-1b 所示。假设系梁的弯矩分布等同于刚性支承连续梁时的弯矩分布，求出此时恒载作用下的各支点反力，各支点反力即为对应的竖直吊杆的索力或者斜吊杆索力的竖向分力。该状态下系梁内力的分布状态类似于多跨的刚性支承连续梁，梁中正负弯矩交替变化，内力均匀且数值较小。但是该方法仅考虑了系梁的线型，并没有考虑拱圈的作用，求得索力分布和系梁弯矩分布可能并不均匀。

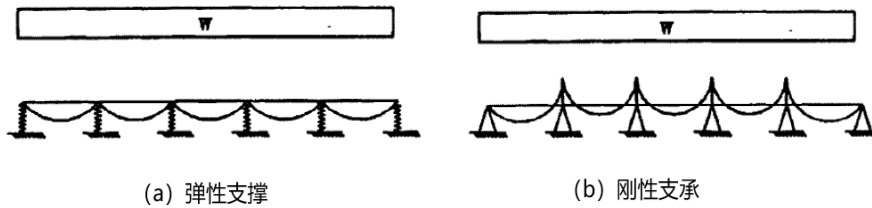


图 1 受力分析简图

#### (2) 刚性吊杆法

刚性吊杆法主要思想是取吊杆的轴向刚度为较大值，保证吊杆上下两端点间的相对位移等于零，以此来协调系梁和拱肋之间变形状态，从而得到最优索力。这种方法主要的研究对象是拱肋，在系杆拱结构中，拱肋具有较好的受压性能。刚性吊杆法通过协调拱肋和系梁之间的关系，充分利用拱肋的抗压性能，使结构受力达到理想状态。在有限元软件计算过程中，可对吊杆的轴向刚度进行放大，使吊杆两端点间的相对位移为零。通过这种方式求得恒载作用下吊杆的内力即为所求吊杆轴力。由于在计算中假定吊杆为完全刚性，故将此法称为“刚性吊杆法”。

#### (3) 零位移法

零位移法是指在恒载作用下通过调整吊杆索力，使结构在成桥状态下，系梁与吊杆锚固连接点处位移为零。该法是在恒载作用下通过选择合适的索力使成桥状态结构在吊杆、梁交点处位移为零。

#### (4) 最小弯曲能法

该方法以结构(拱肋和系梁)的弯曲应变能达到最小为目标。对于一次落架的系杆拱桥，可将拱肋、系梁和吊杆的轴向刚度赋以足够大的值或者将拱肋和系梁截面抗弯刚度赋予足够小的值，此时在恒载作用下，结构内力状态即为目标状态，弯曲应变能最小，对应的吊杆轴力即为所求。

#### (5) 影响矩阵法

影响矩阵法的原理是将结构中控制构件的内力、应力或者节点位移作为目标变量，将吊杆力视为可调变量，通过影响矩阵建立目标变量与可调变量之间的关系，通过调整各个可调变量的大小，使是目标变量达到设定的目标。由于该方法既不限定结构受力或位移状态，也未限定目标函数，因此可将其视为一种数学计算工具，用于索力优化。

## 1.2 案例模型简介

图 2 中所示的系杆拱计算跨径为 148m，共有 21 对吊杆。该模型单侧拱肋由两个钢管混凝土拱圈通过圆钢管连接，内外两个拱肋均采用二次抛物线形式。其中内侧拱的矢跨比为  $f/L=29/146$ ，外侧拱的矢跨比为  $f/L=37/150$ 。左右两侧拱肋向桥中心倾斜以提高横向稳定性，形成 X 型拱肋（提篮拱）。拱肋均采用  $1200 \times 24\text{mm}$  钢管混凝土截面，横梁及腹杆为  $800 \times 16\text{mm}$  钢管。

为简化计算，计算时取单侧拱肋计算。模型中拱肋、横梁、腹杆、系梁、吊杆等均采用框架单元模拟。拱肋与系梁在拱脚连接处为刚性连接。系梁一侧采用固定铰接支座（约束 UX、UY、UZ），另一侧采用滑动支座（约束 UY、UZ）。在成桥状态下，考虑了结构自重、桥面板恒载。本文将以此模型为例简要介绍在 CSiBridge 中吊杆力的计算，并对拱桥的吊杆力、位移、弯矩进行对比，分析每种方法对于该桥的适用性。

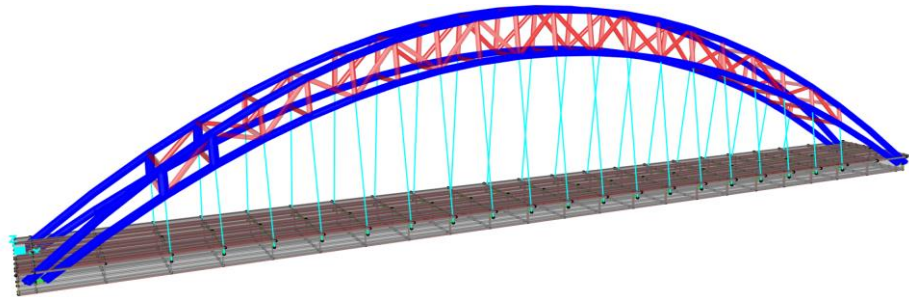


图 2 提篮拱模型示意图

## 2 方法实现

### 2.1 刚性支承连续梁法

CSiBridge 中采用刚性支承连续梁法计算吊杆索力时，需将吊杆为系梁提供的竖向弹性支承视为竖向刚性支承。分析时可以直接删除多余吊杆，在吊杆和系杆交点施加节点支座约束模拟刚性支承，这里仅需约束各个吊点的竖向位移（U3），模型处理如下图所示，然后计算该模型恒载荷载工况下各个支点的反力。提取各个支点反力，在完整模型中，将各支点反力作为各个吊杆的目标力，通过目标力工况完成索力的施加。

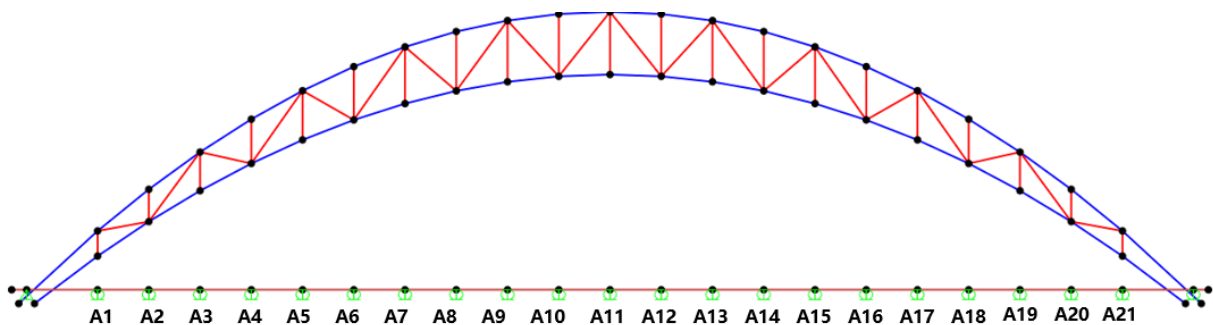


图 3 刚性支承法模型示意图

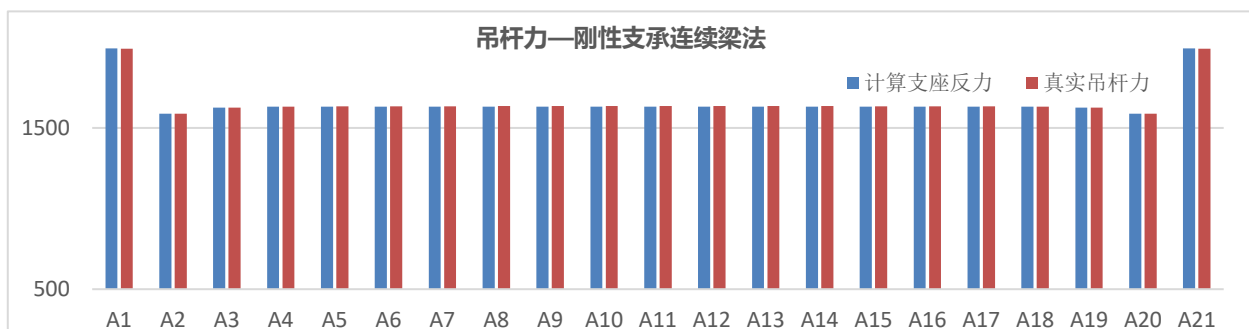


图 4 刚性支承法-计算支座反力与真实吊杆力对比图

由于该系杆拱吊索布置较为均匀，因此采用刚性支撑法计算吊杆力时，各个吊杆的轴力分布都比较均匀。在靠近拱脚位置处由于吊杆距离支座长度较长，两侧吊杆索力明显大于中间各个吊杆轴力。成桥下状态下结构的位移和系梁的弯矩分布图如图 5 所示。

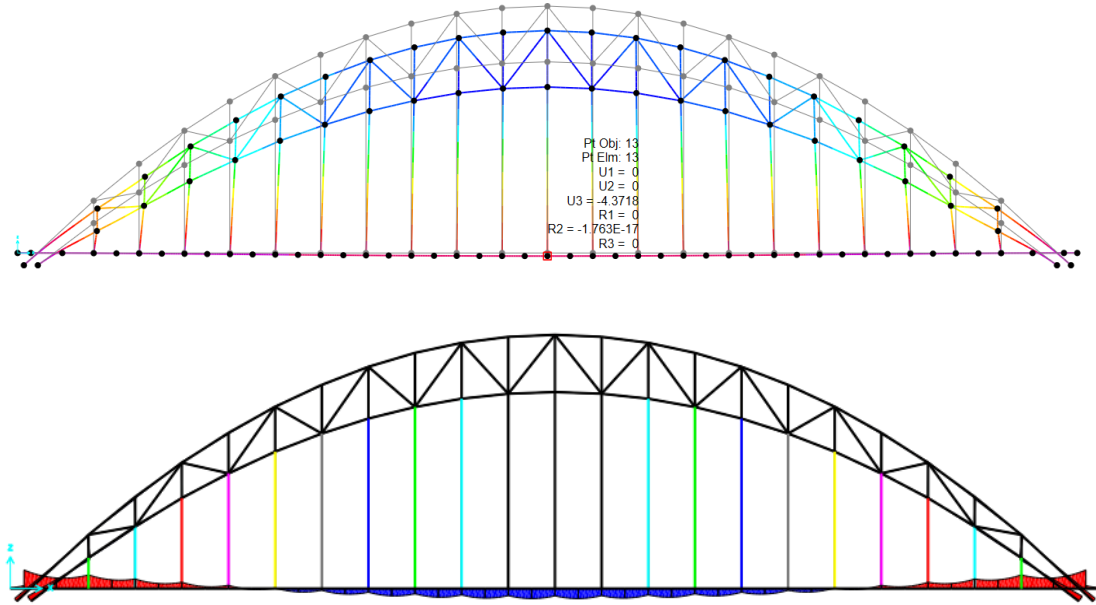


图 5 刚性支承法-结构位移与弯矩分布图

由以上结果可知，采用刚性支撑连续梁法时，在算得的吊杆力作用下，系梁跨中位移为最大值为-4.37mm。系梁拱脚处的弯矩最大值为 8577.4kN·m，系梁跨中处的弯矩最小为 4645kN·m。整体来看，吊杆减少了系梁部分位置的弯矩峰值，单并没有有效的改变弯矩的分布，使弯矩分布成正负交替状态。因此在该吊杆力作用下部分系梁的承载能力可能无法充分利用，此索力的分布并不是一个特别的理想的结果，需要重新优化索力。

## 2.2 刚性吊杆法

以文章第一节中的模型为例，简要介绍刚性吊杆法在 CSiBridge 中的操作。建立成桥模型后首先需要对吊杆进行属性修正，如下图所示，这里将吊杆的横截面面积放大了 1000 倍。注意横截面面积对应的是框架的轴向刚度，修改该数值并不会改变构件的自重，仅会改变框架单元的轴向刚度。修正完成后即可进行分析，求解出在恒载工况下各个吊杆的轴力，即为所求的吊杆力。然后将该吊杆力提取出来，恢复吊杆的正常刚度，为各个吊杆指定目标力，目标力的大小为提取的吊杆力，重新计算即可得到所需的成桥状态。

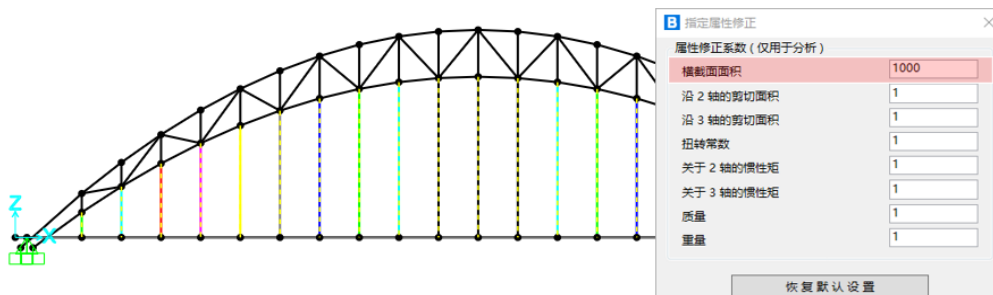


图 6 刚性吊杆法-属性修正

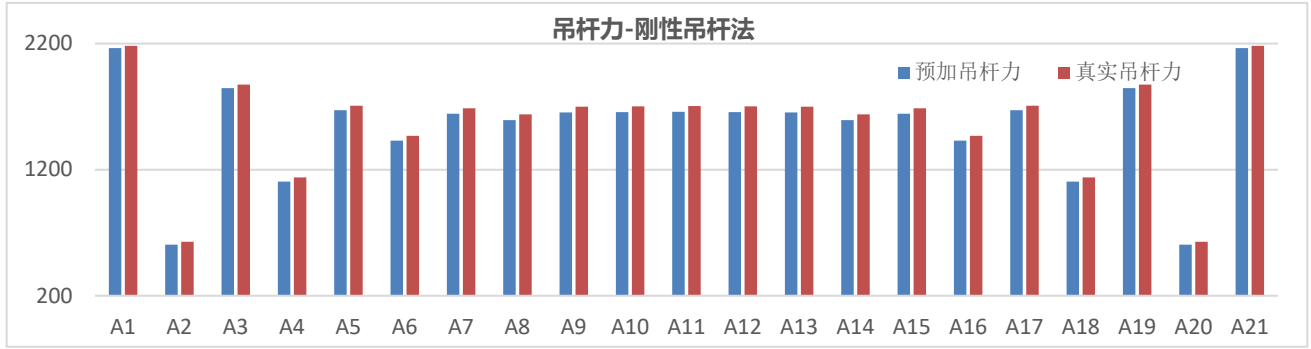


图7 刚性吊杆法-预加吊杆力与真实吊杆力对比图

采用刚性吊杆法计算索力时，可以看到对于该模型计算的吊杆力在拱脚位置处非常的不均匀，拱脚第一个吊杆力有 2180.844kN，而第二根吊杆力却为 627.853kN，两者的差异非常大，不符合索力分布均匀的原则。简要分析其原因为，在靠近拱脚位置处，第一根吊杆的位置处的拱肋的刚度较大，且承担的系梁的梁段长度较长，因此计算的吊杆力较大。靠近拱桥中间位置处，其刚度分布较为均匀，系梁的分段长度相同，因此计算得到的吊杆力相差不大。成桥下状态下结构的位移和系梁的弯矩分布图如图 8 所示。

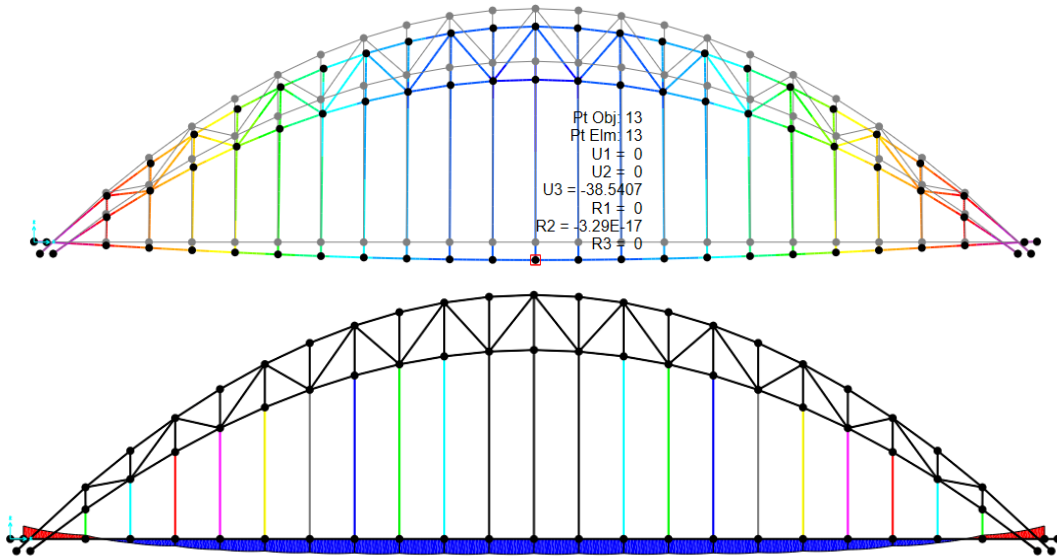


图8 刚性吊杆法-结构位移与弯矩分布图

查看结构的位移图可知，采用刚性吊杆法时，在算得的吊杆力作用下，系梁跨中位移为最大值为-38.54mm，其竖向变形过大，不符合设计要求。由弯矩分布图可知，系梁跨中处的弯矩最大为 22130kN·m，系梁拱脚处的弯矩最大值为 18860kN·m，整体来看，系梁弯矩过大，吊杆并未有效减少了系梁部分弯矩，吊杆力的作用并不明显。因此采用刚性吊杆法计算该模型的吊杆力并不合适，需要重新优化索力。

### 2.3 最小弯曲能法

在 CSiBridge 中采用最小弯曲能法计算吊杆力时，首先按设计要求建立成桥模型，然后选中所有拱肋和系梁对应的框架单元，进行属性修正。这里将拱肋和系梁的抗弯刚度缩小 0.001 倍，其操作如图-9 所示。修正完成后即可进行分析，求解出在恒载工况下各个吊杆的轴力，即为所求的吊杆力。然后将该吊杆力提取出来，将模型中拱肋和系梁恢复正常刚度，通过目标力工况为吊杆施加分析得到的吊杆力，重新计算即可得到所需的成桥状态。

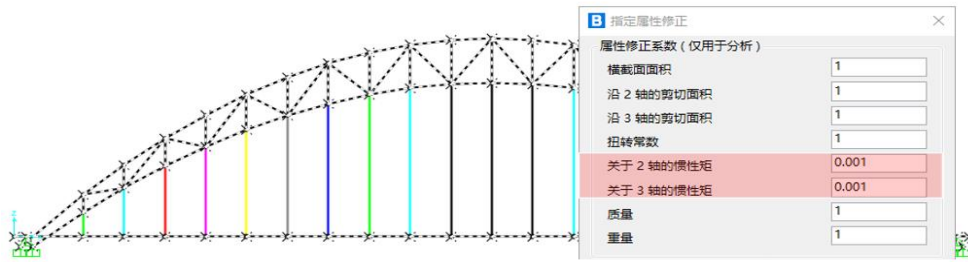


图 9 最小弯矩能法-属性修正

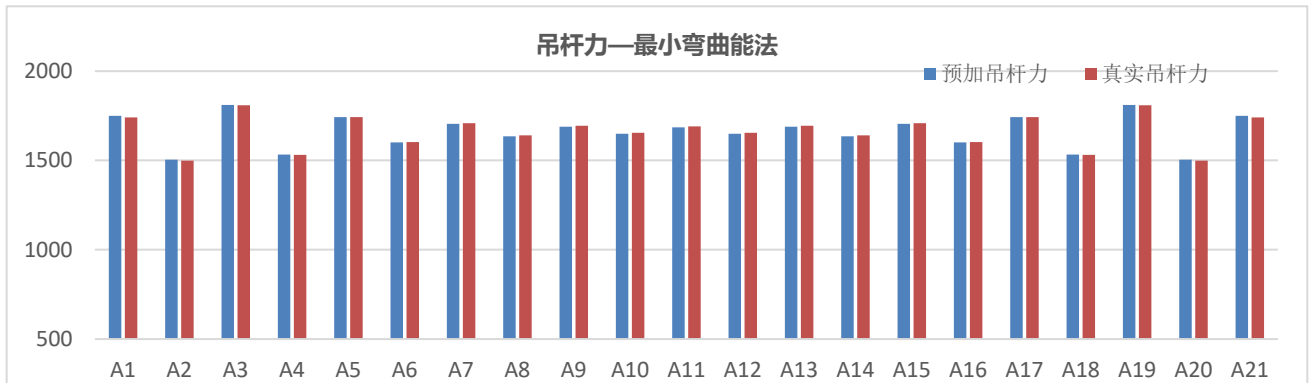


图 10 最小弯曲能法-预加吊杆力与真实吊杆力对比图

采用最小弯曲能法计算索力时，可以看到计算得到的吊杆力分布较为均匀，吊杆力基本分布在 1600kN~1800kN 之间，符合索力分布均匀的原则。成桥下状态下结构的位移和系梁的弯矩分布图如图 8 所示。

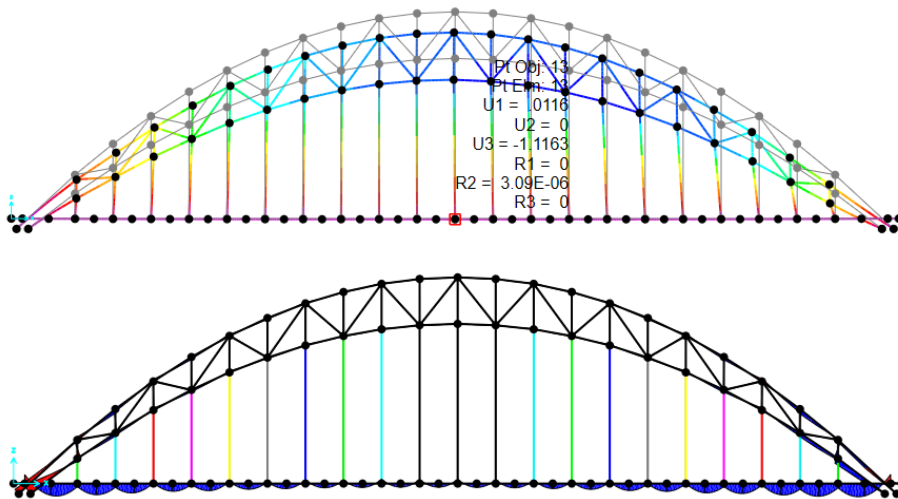


图 11 最小弯曲能法-结构位移与弯矩分布图

查看结构的位移图可知，采用最小弯曲能法时，在算得的吊杆力作用下，系梁跨中位移为最大值为-1.319mm，其竖向变形非常小，满足设计要求。有弯矩分布图可知，系梁跨中处的弯矩最大为 827kN·m，系梁拱脚处的弯矩最大值为 2134kN·m，整体来看，系梁弯矩分布均匀，呈波浪状分布，材料利用率较为充分。因此采用最小弯曲能法计算该模型的吊杆力可作为手动优化调整吊杆力的基础，在此状态上进一步优化索力。

## 2.4 零位移法

CSiBridge 中提供了专用于索力优化的工具<sup>[3]</sup>：荷载优化器，其理论基础为影响矩阵法。这里以零位移法的状态为目标，控制吊杆和系梁交点位置的竖向位移为 0，通过荷载优化器来计算在该状态下的吊杆轴力。

对于文章第一节中的模型，其计算步骤如下：①首先建立成桥状态下的模型，②定义一个荷载模式，为“优化荷载”，并为各个吊杆指定-0.001mm/mm 的单位应变荷载，③定义一个阶段施工的荷载工况，在第一步添加所有结构和结构恒载。并依据结构的对称性，将吊杆分为 13 组，依次对各组吊杆施加荷载“优化荷载”。④打开荷载优化器，在荷载优化器中选择上一步定义的阶段施工荷载工况为“优化工况”，指定各个吊杆力为可调变量，目标变量即设定目标为各个吊点的竖向位移，这里均设置为 0.0005mm，如图-12 所示。定义完成后，即可运行分析，程序会自动迭代计算求出满足要求的吊杆力。

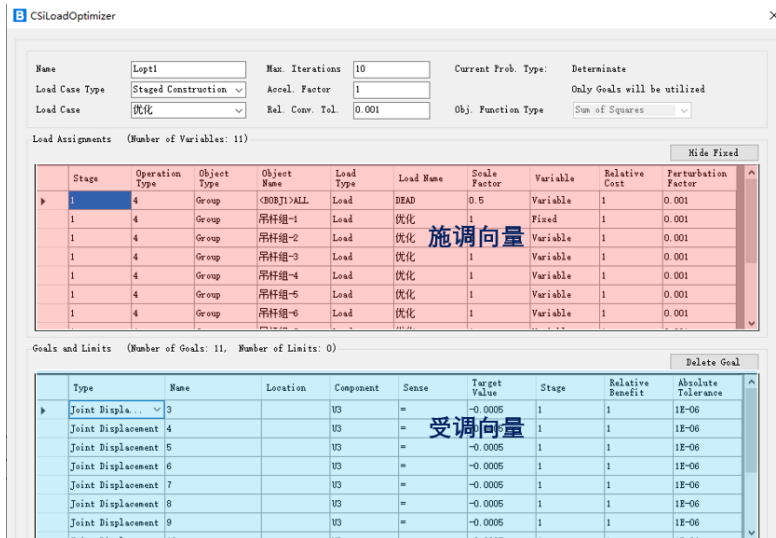


图 12 零位移法-荷载优化器设置

分析完成后程序会自动生成优化工况“优化\_Lopt1”，在该工况中用户可以看到各个吊杆组中的比例系数发生了变化，如图-13 所示。以吊杆组-1 为例，优化前指定的初始应变为 0.001mm/mm，比例系数为 1。达到设置的目标状态时，比例系数变为 0.7846，其施加的应变荷载为初始应变荷载的 0.7846 倍，表示需要对吊杆组-1 施加  $0.001\text{mm/mm} \times 0.7846\text{mm/mm}$  的应变荷载。其他的吊杆组按相同的方式依据比例系数调整施加的索力，结构即可达到设定的目标状态。成桥状态下，各个吊杆的轴力图如图 14 所示。

**荷载工况数据 - Staged Construction 阶段施工分析**

阶段数据: 1 (0 天; 输出: 无标签)

阶段操作	对象类型	对象名称	添加龄期	类型	名称	比例系数
Add Structure	Group	All	3.			
Load Objects	Group	吊杆组-1		Load Pattern	优化	0.7846
Load Objects	Group	吊杆组-2		Load Pattern	优化	1.8339
Load Objects	Group	吊杆组-3		Load Pattern	优化	1.7424
Load Objects	Group	吊杆组-4		Load Pattern	优化	1.694
Load Objects	Group	吊杆组-5		Load Pattern	优化	1.6129
Load Objects	Group	吊杆组-6		Load Pattern	优化	1.5749
Load Objects	Group	吊杆组-7		Load Pattern	优化	1.5287
Load Objects	Group	吊杆组-8		Load Pattern	优化	1.5025
Load Objects	Group	吊杆组-9		Load Pattern	优化	1.4795
Load Objects	Group	吊杆组-10		Load Pattern	优化	1.4678
Load Objects	Group	吊杆组-11		Load Pattern	优化	1.4634

图 13 优化工况结果

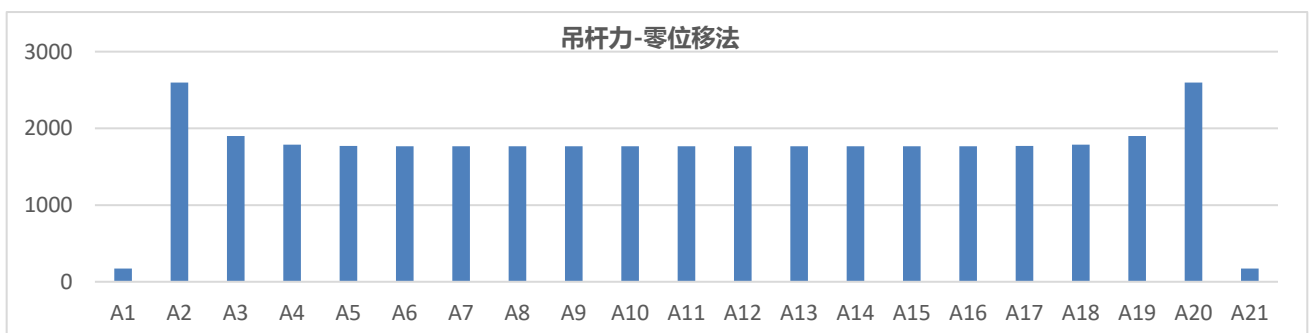


图 14 零位移法-计算吊杆轴力图

采用零位移法计算吊杆力时，可以看到跨中部分计算得到的吊杆力分布较为均匀，吊杆力基本分布在 1600KN~1800KN 之间，但是拱脚位置处的索力分布却差异较大。其中边吊杆 A1、A21 吊杆力非常小仅有 172KN，但是吊杆 A2、A20 的吊杆力却有 2597KN，轴力相差 10 倍左右，吊杆 A1、A21 的基本没有太大作用。成桥下状态下结构的位移和系梁的弯矩分布如图 15 所示。

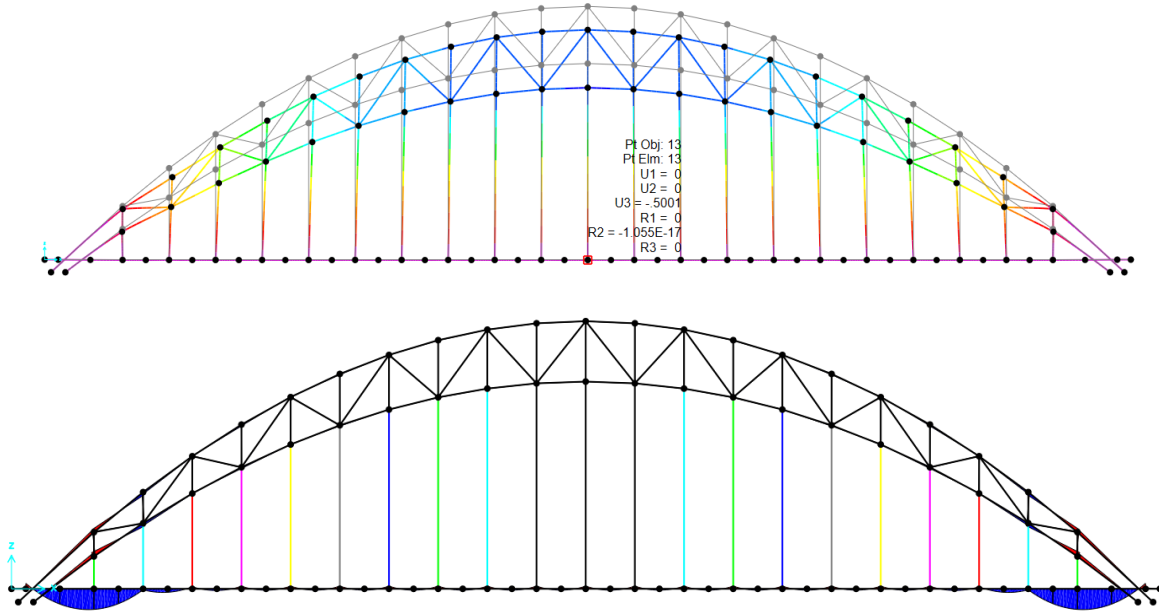


图 15 零位移法-结构位移与弯矩分布图

查看结构的位移图可知，采用零位移法时，在算得的吊杆力作用下，系梁跨中位移为最大值为-0.5001mm，其竖向变形非常小，满足设计要求。由系梁的弯矩分布图可知，系梁跨中处的弯矩最大负弯矩为 434kN·m，系梁拱脚处的弯矩最大值为 6840kN·m，整体来看，系梁弯矩分布均匀，呈波浪状分布，材料利用率较为充分，但是端部系梁的弯矩过大，边吊杆 A1、A21 对系梁的弯矩控制没有明显作用。该计算结果大部分都比较理想，但是拱脚位置处还需要优化，需要调整拱脚附近吊杆力，发挥吊杆 A1、A21 的作用，减少系梁弯矩峰值。

### 3 综合结果比较

将上述几种算法求得的吊杆力进行对比，整理数据如下图所示。可以看到，基于以上方法计算吊杆的索力在 A1、A2、A3、A4、A18、A19、A20、A21 中吊杆力差异较大，其余吊杆力的分布类似，数值相差并不明显。其中最小弯曲能法计算各个吊杆的差异最小，吊杆力最稳定。零位移法计算的吊杆力差异最大，吊杆 A1、A2 轴力数值非常小，基本没有受力，而其他吊杆力分布都比较稳定。另外，对于该模型刚性支撑连续梁法和最小弯矩能法的计算结果相对比较接近，仅在拱脚位置处吊杆力差异会较大。仅从吊杆力的分布来说，最小弯曲能法的吊杆力计算结果最合理。

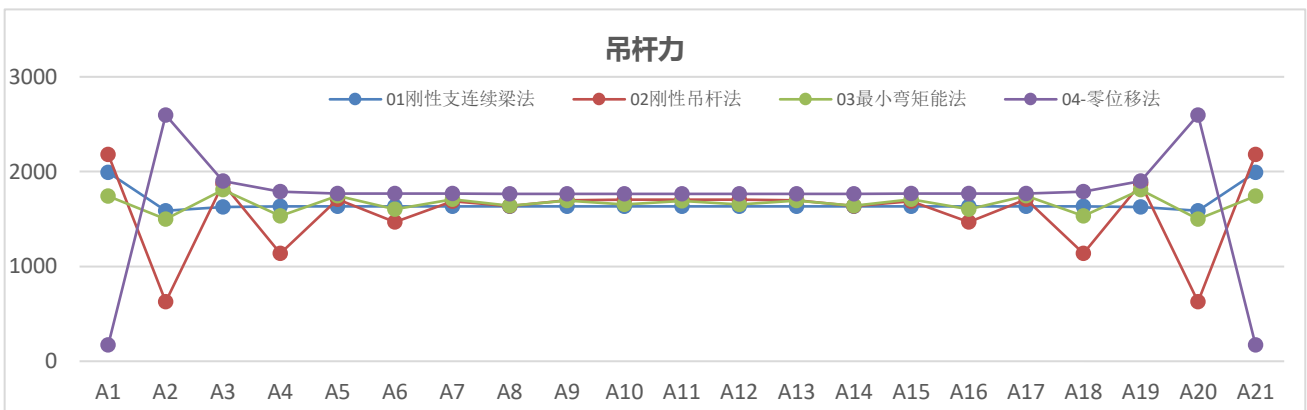


图 16 吊杆力汇总

由图 17 对比四种算法得到的系梁弯矩图，刚性连续梁法和刚性吊杆法计算出的系梁弯矩分布形式均类似抛物线型，表明吊杆力并没有有效改善系梁的弯矩的分布。尤其是刚性吊杆法，最大最小弯矩变化幅度最明显，不满足设计要求。零位移法和最小弯曲能法中系梁的弯矩分布基本呈波浪形式，吊杆力有效的削减了系梁的弯矩峰值。在跨中部分，两种分析方法的弯矩分布非常类似。而越靠近拱脚位置处，两者差异越明显。其中零位移法在拱脚处的峰值达到了 6840kN·m，而最小弯曲能法的峰值仅有 2134kN·m，因此从系杆弯矩分布的角度来说最小弯曲能法的计算结果更合理。

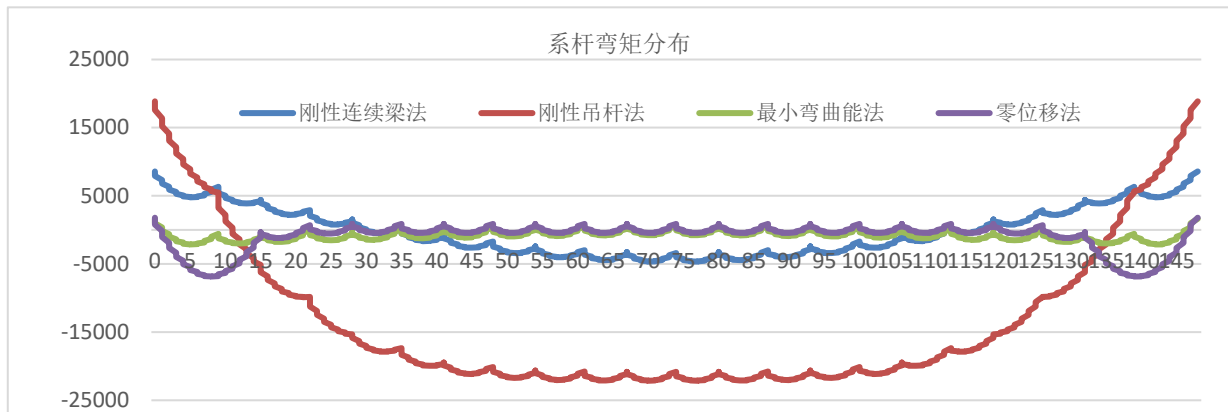


图 17 系梁弯矩分布汇总图

综上对比分析可知，对于该模型采用最小弯曲能法求得的成桥吊杆内力值分布较均匀，系梁弯矩呈波浪状均匀分布，且数值较小，竖向位移较小，结果较为合理。可以以此计算状态为基础，选取系梁或拱肋部分截面弯矩为控制目标，进一步优化吊杆力。

需要注意的是，不同拱桥具有不同结构形式、刚度分布等，因此不同的计算方法计算出的吊杆力差异可能较大，不同桥型适用的索力计算方法可能并不相同。计算时，用户可采用多种吊杆力计算方式初步计算吊杆力，然后选取其中最合理的结果初始索力，然后再依据其他要求进一步优化索力。

## 4 小结

在系杆拱桥设计过程中，吊杆索力的确定是桥梁结构分析计算的核心内容。本文综述了系杆拱桥成桥吊杆索力优化的几种常用方法以及如何在 CSiBridge 中实现，并简要探讨了这些方法在确定系杆拱桥成桥吊杆索力上的适用性。CSiBridge 作为桥梁专业性软件，在确定系杆拱桥成桥吊杆力问题时，具有方法多样、概念清晰、计算快捷等特点，可以有效地指导系杆拱桥的设计及施工。

## 参考资料

- [1]傅金龙, 黄天立. 刚性系杆拱桥成桥吊杆索力优化方法的适用性研究[J]. 铁道科学与工程学报, 2014, 11(4):8.
- [2]李广群. 基于系杆拱桥成桥吊杆索力优化方法[J]. 四川水泥, 2015(5):1.
- [3]Computers & Structures Inc., 北京筑信达工程咨询有限公司. CSI 分析参考手册. 2021.